

*Handwritten note:*  
Vorlesungsskript  
über Finite Elemente  
Wintersemester 1987/88

VORLESUNGSSKRIPT

ÜBER

FINITE ELEMENTE

IM WS 1987/88

*Frank Natterer*

# INHALTSVERZEICHNIS

## TEIL I : THEORIE ELLIPTISCHER GLEICHUNGEN

- § 1 Das Lemma von LAX - MILGRAM
- § 2 SOBOLEV - Räume
- § 3 Einbettungssätze
- § 4 Randwertprobleme elliptischer  
Differentialgleichungen

## TEIL II : DIE METHODE DER FINITEN ELEMENTE

- § 5 Das GALERKIN - Verfahren
- § 6 Das einzelne finite Element
- § 7 Approximation im einzelnen  
finiten Element
- § 8 Zusammensetzen finiter Elemente
- § 9 Die konforme Methode der  
finiten Elemente

## TEIL III: IMPLEMENTIERUNG

- § 10 Grundbegriffe
- § 11 Berechnung der Elementarmatrizen  
und Elementvektoren
- § 12 Lösung der diskreten Probleme
- § 13 Die Kondition der Systemmatrix

## TEIL IV : NICHTKONFORME METHODE DER FINITEN ELEMENTE

- § 14 Nichtkonformes GALERKIN - Verfahren
- § 15 Der Patch - Test

TEIL V : NICHTLINEARE PROBLEME

§ 16 Variationsungleichungen

§ 17 Streng monotone Operatoren

TEIL VI : DÜNNE SCHALEN

§ 18 Differentialgeometrische Grundlagen

§ 19 Das Schalenmodell von KOITER

§ 20 Die Methode der finiten Elemente  
für KOITER'sche Schalen

## § 2 SOBOLEV - RÄUME

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  offen. Sei  $C_0^\infty(\Omega)$  die Menge der Funktionen aus  $C^\infty(\Omega)$  mit kompaktem Träger in  $\Omega$ . Ein Beispiel für  $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  ist

$$w(x) = \begin{cases} c e^{1/(|x|^2-1)} & , \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad |x| \geq 1 \end{cases} .$$

Dabei ist  $c$  so bestimmt, daß

$$\int_{\mathbb{R}^d} w(x) dx = 1 .$$

Setzen wir für  $\varepsilon > 0$   $w_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} w(x/\varepsilon)$ , so gilt

$$w_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) , \quad \int_{\mathbb{R}^d} w_\varepsilon(x) dx = 1 , \quad w_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{für } |x| \geq \varepsilon .$$

Sei  $f \in L_2(\Omega)$ . Dann definieren wir eine geglättete Version von  $f$  durch

$$(2.1) \quad w_\varepsilon * f(x) = \int_{\Omega} w_\varepsilon(x-y) f(y) dy .$$

Es ist  $w_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  und sogar  $w_\varepsilon * f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , wenn  $f$  außerhalb einer kompakten Menge verschwindet.  $w_\varepsilon * f$  approximiert  $f$  in folgendem Sinne.

SATZ 2.1: Sei  $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ . Dann ist  $w_\varepsilon * f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ , und es gilt für  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$w_\varepsilon * f \rightarrow f \quad \text{in } L_2(\mathbb{R}^d) .$$

BEWEIS: Es ist

$$\begin{aligned} w_\varepsilon * f(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} w_\varepsilon(x-y)(f(y) - f(x))dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} w_\varepsilon(z)(f(x-z) - f(x))dz \quad . \end{aligned}$$

Schreibt man  $w_\varepsilon^{1/2} w_\varepsilon^{1/2}$  für  $w_\varepsilon$ , so ergibt die Schwarz'sche Ungleichung

$$(w_\varepsilon * f(x) - f(x))^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d} w_\varepsilon(z)dz \int_{\mathbb{R}^d} w_\varepsilon(z)(f(x-z)-f(x))^2 dz.$$

Das erste Integral rechts ist 1. Integration der Ungleichung bezüglich  $x$  ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (w_\varepsilon * f(x) - f(x))^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} w_\varepsilon(z)(f(x-z)-f(x))^2 dx dz \\ &= \int_{|z| \leq \varepsilon} w_\varepsilon(z) \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-z)-f(x))^2 dx dz. \end{aligned}$$

Nun benutzen wir eine Eigenschaft von  $L_2$ -Funktionen, nämlich ihre Stetigkeit im quadratischen Mittel: Zu  $\delta > 0$  gibt es  $\varepsilon > 0$  mit

$$\int (f(x-z)-f(x))^2 dx \leq \delta \quad \text{falls} \quad |z| \leq \varepsilon \quad .$$

Für dieses  $\varepsilon$  folgt also

$$\int_{\mathbb{R}^d} (w_\varepsilon * f(x) - f(x))^2 dx \leq \delta \int_{|z| \leq \varepsilon} w_\varepsilon(z) dz = \delta \quad .$$

Da  $\delta > 0$  beliebig ist, bedeutet dies

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|w_\varepsilon * f - f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0$$

und dies ist die Behauptung. ■

Sei  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$  ein Multiindex, und sei

$$D^\alpha = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_d} \right)^{\alpha_d}$$

eine Ableitung der Ordnung  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ . Für  $f \in C^\infty(\Omega)$ ,  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  gilt

$$\int_{\Omega} f D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha f \phi \, dx \quad .$$

DEFINITION 2.1: Sei  $f \in L_2(\Omega)$ . Existiert  $v \in L_2(\Omega)$  mit

$$\int_{\Omega} f D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi \, dx \quad , \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad ,$$

so sagen wir, daß  $f$  die verallgemeinerte Ableitung  $D^\alpha f = v$  besitzt.

BEISPIEL:  $d = 1$ ,  $\Omega = (-1, +1)$ ,  $f(x) = |x|$ ,  $\alpha = 1$ .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f D^\alpha \phi \, dx &= \int_{-1}^{+1} f \phi' \, dx = \int_0^1 x \phi' \, dx - \int_{-1}^0 x \phi' \, dx \\ &= - \int_0^1 \phi \, dx + \int_{-1}^0 \phi \, dx = - \int_{\Omega} \operatorname{sgn}(x) \phi \, dx \quad . \end{aligned}$$

Also besitzt  $f$  die verallgemeinerte Ableitung  $f'(x) = \operatorname{sgn}(x)$ .

BEMERKUNG: Die verallgemeinerte Ableitung ist lokal: Ist  $\Omega' \subseteq \Omega$  und hat  $f$  in  $\Omega$  die verallgemeinerte Ableitung  $D^\alpha f$ , so hat  $f$  diese verallgemeinerte Ableitung auch in  $\Omega'$ .

DEFINITION 2.2.: Der Sobolev-Raum  $H^s(\Omega)$ ,  $s \geq 0$  ganz, besteht aus denjenigen Funktionen aus  $L_2(\Omega)$ , welche verallgemeinerte Ableitungen bis einschließlich der Ordnung  $s$  haben. Für  $f, g \in H^s(\Omega)$

setzen wir

$$(2.1) \quad (f, g)_{H^S(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Omega} D^{\alpha} f D^{\alpha} g \, dx, \quad \|f\|_{H^S(\Omega)} = ((f, f)_{H^S(\Omega)})^{1/2}.$$

SATZ 2.2:  $H^S(\Omega)$  ist mit dem inneren Produkt (2.1) ein Hilbertraum.

BEWEIS: Zu zeigen ist, daß  $H^S(\Omega)$  vollständig ist. Sei also  $(f_n)$  eine Cauchy-Folge in  $H^S(\Omega)$ , d.h.  $D^{\alpha}(f_n - f_m) \rightarrow 0$ ,  $n, m \rightarrow \infty$ ,  $|\alpha| \leq s$ . Da  $L_2(\Omega)$  vollständig ist, gibt es für  $|\alpha| \leq s$  Funktionen  $v_{\alpha} \in L_2(\Omega)$  mit  $D^{\alpha} f_n \rightarrow v_{\alpha}$ ,  $n \rightarrow \infty$ , in  $L_2(\Omega)$ . Für  $\phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$  gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_0 D^{\alpha} \phi \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n D^{\alpha} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} D^{\alpha} f_n \phi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_{\alpha} \phi \, dx. \end{aligned}$$

Also hat  $v_0$  die verallgemeinerten Ableitungen  $D^{\alpha} v = v_{\alpha}$ ,  $|\alpha| \leq s$ , und liegt daher in  $H^S(\Omega)$ . Darüber hinaus gilt  $f_n \rightarrow v_0$  in  $H^S(\Omega)$ . Also konvergiert in  $H^S(\Omega)$  jede Cauchy-Folge. ■

SATZ 2.3: Sei  $\Omega' \subset\subset \Omega$  (d.h. es gibt eine kompakte Menge  $K$  mit  $\Omega' \subset K \subset \Omega$ ). Sei  $f \in H^S(\Omega)$ . Dann gilt für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  in  $\Omega'$

$$D^{\alpha}(w_{\varepsilon} * f) = w_{\varepsilon} * D^{\alpha} f$$

und in  $H^S(\Omega')$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w_{\varepsilon} * f = f.$$

BEWEIS: Zunächst ist

$$\begin{aligned} D^\alpha(w_\varepsilon * f)(x) &= D^\alpha \int_{\Omega} w_\varepsilon(x-y)f(y)dy \\ &= \int_{\Omega} D_x^\alpha w_\varepsilon(x-y)f(y)dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (D_y^\alpha w_\varepsilon(x-y))f(y)dy \quad . \end{aligned}$$

Sei nun  $\varepsilon$  so klein, daß für jedes  $x \in \Omega'$  die Kugel um  $x$  mit Radius  $\varepsilon$  noch zu  $\Omega$  gehört. Dann ist  $w_\varepsilon(x-\cdot) \in C_0^\infty(\Omega)$  und daher

$$\begin{aligned} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D_y^\alpha w_\varepsilon(x-y)f(y)dy &= \int_{\Omega} w_\varepsilon(x-y)D^\alpha f(y)dy \\ &= (w_\varepsilon * D^\alpha f)(x) \quad . \end{aligned}$$

Damit ist die erste Behauptung gezeigt, und die zweite folgt aus Satz 2.1. ■

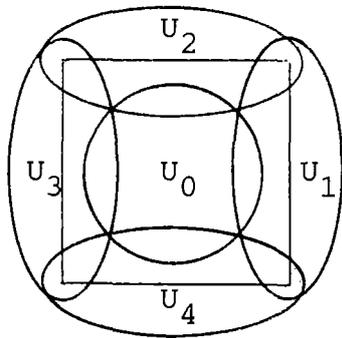
DEFINITION 2.3:  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  heißt Lipschitz-Gebiet, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $\Omega$  ist beschränkt
- (ii) Man kann  $\partial\Omega$  durch endlich viele offene Mengen  $U_i$  so überdecken, daß  $U_i \cap \partial\Omega$  Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion  $f_i : (0,1)^{d-1} \rightarrow U_i$  ist
- (iii)  $U_i \cap \Omega$  liegt auf einer Seite von  $U_i \cap \partial\Omega$ .

SATZ 2.4: Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet. Dann gibt es zu jedem  $f \in H^S(\Omega)$  eine Folge  $(f_n)$  in  $C^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit  $f_n \rightarrow f$  in  $H^S(\Omega)$ .

BEWEIS: Wir führen den Beweis für  $d = 2$  und  $\Omega = (1,2)^2$ . Sei

$U_0, \dots, U_4$  eine Überdeckung von  $\Omega$  wie in der Abbildung, und seien



$\psi_0, \dots, \psi_4$  eine dazugehörige Zerlegung der Eins. Sei  $f \in H^S(\Omega)$ . Dann ist

$$f = \sum_{i=0}^4 f_i, \quad f_i = \psi_i f.$$

Wir zeigen: Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es Funktionen  $\phi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  mit

$$(2.2) \quad \|\phi_i - f_i\|_{H^S(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Für  $i = 0$  bekommt man  $\phi_0$  sofort aus Satz 2.3. Für  $i > 0$  betrachten wir den typischen Fall  $i = 1$ . Wir setzen

$$f_{i,\delta}(x) = f_i\left(\frac{1}{1+\delta}x\right).$$

Für hinreichend kleines  $\delta$  ist

$$(2.3) \quad \|f_{i,\delta} - f_i\|_{H^S(\Omega \cap U_i)} \leq \varepsilon/2,$$

weil  $D^\alpha f$ ,  $|\alpha| \leq s$  als  $L_2$ -Funktion im quadratischen Mittel stetig ist.

Nun gibt es ein Gebiet  $\Omega_i$  mit  $f_{i,\delta} \in H^S(\Omega_i)$  und  $\Omega \cap U_i \subset\subset \Omega_i$ . Nach Satz 2.3 gibt es dann auch ein  $\phi_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$  mit

$$(2.4) \quad \|f_{i,\delta} - \phi_i\|_{H^S(\Omega \cap U_i)} \leq \varepsilon/2.$$

Aus (2.4), (2.3) folgt (2.2).

■

## § 3 EINBETTUNGSSÄTZE

DEFINITION 3.1: Ein Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  erfüllt die Kegelbedingung, wenn es einen abgeschlossenen Kegel  $K$  mit  $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$  (d.h.  $K = \{r\omega : 0 \leq r \leq R, \omega \in S\}$ ,  $S \subseteq S^{n-1}$ ,  $R > 0$ ,  $\overset{\circ}{S} \neq \emptyset$ ) gibt, so daß jeder Punkt von  $\Omega$  Spitze eines in  $\Omega$  liegenden Kegels ist, der aus  $K$  durch Bewegung entsteht.

SATZ 3.1 (Sobolev'sche Ungleichung):  $\Omega$  erfülle die Kegelbedingung, und  $s > d/2$ . Dann gibt es eine Konstante  $C$ , so daß

$$\forall f \in C^s(\Omega) \quad \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \leq C \|f\|_{H^s(\Omega)} .$$

BEWEIS: Wir nehmen  $x = 0$  an, und  $0$  sei die Spitze des ganz in  $\Omega$  liegenden Kegels  $K = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = r, 0 \leq r \leq R, \omega \in S\}$ . Sei  $f \in C^s(\Omega)$ . Dann ist für jedes  $\omega \in S$

$$f(0) = - \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left( \frac{R-r}{R} \right)^s f(r\omega) \right\} dr .$$

Nach  $s-1$  partiellen Integrationen wird daraus

$$f(0) = \frac{(-1)^s}{(s-1)!} \int_0^R r^{s-1} \frac{\partial^s}{\partial r^s} \left\{ \left( \frac{R-r}{R} \right)^s f(r\omega) \right\} dr .$$

Die Produktregel ergibt (leeres Produkt bedeutet 1)

$$f(0) = \frac{(-1)^s}{(s-1)!} \int_0^R r^{s-1} \sum_{m=0}^s \binom{s}{m} \left( \frac{-1}{R} \right)^{s-m} \left( \frac{R-r}{R} \right)^m s \cdot (s-1) \cdot \dots \cdot (m+1) \cdot \frac{\partial^m}{\partial r^m} f(r\omega) dr ,$$

also

$$|f(0)| \leq C_1(s, R) \sum_{m=0}^s \int_0^R r^{s-1} \left| \frac{\partial^m}{\partial r^m} f(r\omega) \right| dr$$

mit einer geeigneten Konstanten  $C_1(s,R)$ . Beachten wir

$$\frac{\partial^m}{\partial r^m} f(r\omega) = \sum_{|\alpha|=m} \omega_1^{\alpha_1} \dots \omega_d^{\alpha_d} D^\alpha f(r\omega) \quad ,$$

so erhalten wir mit einer weiteren Konstanten  $C_2(s,R)$

$$|f(0)| \leq C_2(s,R) \sum_{|\alpha| \leq m} \int_0^R r^{s-1} |D^\alpha f(r\omega)| dx \quad .$$

Integration über  $S$  ergibt

$$\begin{aligned} |S| |f(0)| &\leq C_2(s,R) \sum_{|\alpha| \leq m} \int_S \int_0^R r^{s-1} |D^\alpha f(r\omega)| dr d\omega \\ &= C_2(s,R) \sum_{|\alpha| \leq m} \int_K |x|^{s-d} |D^\alpha f(x)| dx \quad . \end{aligned}$$

Nun folgt nach Schwarz

$$|S| |f(0)| \leq C_2(s,R) \sum_{|\alpha| \leq m} \| |x|^{s-d} \|_{L_2(K)} \| D^\alpha f \|_{L_2(K)} \quad .$$

Für  $s > d/2$  ist  $2(s-d) > -d$  und damit  $|x|^{2(s-d)}$  über  $K$  integrierbar, woraus die Sobolev'sche Ungleichung folgt. ■

SATZ 3.2 (Sobolev'scher Einbettungssatz):  $\Omega$  erfülle die Kegelbedingung, und  $s, t$  seien ganze Zahlen mit  $s-t > d/2$ . Dann gibt es zu jedem  $f \in H^s(\Omega)$  ein  $\tilde{f} \in C^t(\Omega)$  mit  $\tilde{f} = f$  f.ü., und es ist mit einer von  $f$  unabhängigen Konstanten  $C(s,R)$

$$\|\tilde{f}\|_{C^t(\Omega)} \leq C(s,R) \|f\|_{H^s(\Omega)} \quad .$$

BEWEIS: Sei  $f \in H^S(\Omega)$ . Nach Satz 2.3 gibt es eine Folge  $(f_n)$  in  $C^S(\Omega)$  mit  $f_n \rightarrow f$  in  $H^S(\Omega)$ . Nach Satz 3.1 gibt es eine Konstante  $C(s,R)$ , so daß

$$\|f_n - f_m\|_{C^t(\Omega)} \leq C(s,R) \|f_n - f_m\|_{H^S(\Omega)} .$$

Also ist  $(f_n)$  eine Cauchy-Folge in  $C^t(\Omega)$ . Da  $C^t(\Omega)$  vollständig ist, gibt es  $\tilde{f} \in C^t(\Omega)$  mit  $f_n \rightarrow \tilde{f}$  in  $C^t(\Omega)$ . Wegen  $f_n \rightarrow f$  in  $L_2(\Omega)$  gilt  $\tilde{f} = f$  f.ü. Ferner ist

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_{C^t(\Omega)} &= \lim_n \|f_n\|_{C^t(\Omega)} \leq C(s,R) \lim_n \|f_n\|_{H^S(\Omega)} \\ &= C(s,R) \|f\|_{H^S(\Omega)} . \end{aligned}$$

■

SATZ 3.3: Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet. Dann gibt es eine stetige lineare Abbildung  $T : H^1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)$  mit

$$Tf(x) = f(x) \quad , \quad x \in \partial\Omega$$

für  $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ .

BEWEIS: Wir betrachten nur den Fall  $d = 2$  und  $\Omega = (0,1)^2$ . Sei  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Dann ist für  $0 < R < 1$

$$\begin{aligned} (3.1) \quad f(0, x_2) &= - \int_0^R \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{R-x_1}{R} f(x_1, x_2) \right) dx_1 \\ &= \int_0^R \left( \frac{1}{R} f(x_1, x_2) - \frac{R-x_1}{R} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right) dx_1 . \end{aligned}$$

Nach Schwarz folgt

$$|f(0, x_2)|^2 \leq C(R) \int_0^1 (f^2 + (\frac{\partial}{\partial x_1} f)^2)(x_1, x_2) dx_1 .$$

Integration über  $x_2$  ergibt

$$\int_0^1 |f(0, x_2)|^2 dx_2 \leq C(R) \|f\|_{H^1(\Omega)}^2 ,$$

und weiter

$$(3.2) \quad \|f\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 \leq 4 C(R) \|f\|_{H^1(\Omega)}^2 .$$

Zu  $f \in H^1(\Omega)$  gibt es nach Satz 2.3 eine Folge  $(f_n)$  in  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$  mit  $f_n \rightarrow f$  in  $H^1(\Omega)$ . Nach (3.2) konvergiert die Folge  $(f_n)$  in  $L_2(\partial\Omega)$ . Wir setzen

$$Tf = \lim_n f_n \quad \text{in } L_2(\partial\Omega) .$$

Offenbar erfüllt  $T$  alle Bedingungen des Satzes. ■

BEMERKUNG: Die Abbildung  $T$  heißt Spurabbildung. Wir betrachten  $Tf$  als die Randwerte von  $f$  auf  $\partial\Omega$ . Dementsprechend schreiben wir auch  $f$  für  $Tf$  auf  $\partial\Omega$  und

$$\|f\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C \|f\|_{H^1(\Omega)} .$$

Entsprechend sind für  $f \in H^S(\Omega)$  die Randwerte von  $D^\alpha f$ ,  $|\alpha| < s$  definiert. Für jedes  $|\alpha| < s$  ist  $\{f \in H^S(\Omega) : D^\alpha f = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$  ein abgeschlossener Unterraum von  $H^S(\Omega)$ , also auch

$$H_0^S(\Omega) = \{f \in H^S(\Omega) : D^\alpha f = 0 \text{ auf } \Gamma \text{ für } |\alpha| < s\} .$$

Später (Satz 3.5) werden wir sehen, daß die Seminorm

$$|f|_{H^s(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} (D^\alpha f)^2 dx$$

auf  $H_0^s(\Omega)$  eine Norm ist.

**SATZ 3.4 (Rellich-Kondrachov):** Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet. Dann ist jede in  $H^s(\Omega)$  beschränkte Menge in  $H^{s-1}(\Omega)$  relativ kompakt.

**BEWEIS:** Es genügt, den Fall  $s = 1$  zu betrachten. Sei also  $M \subseteq H^1(\Omega)$  und  $\|f\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$  für  $f \in M$ . Zu zeigen ist, daß  $M$  in  $L_2(\Omega)$  relativ kompakt ist, d.h. nach dem Kalmogoroffschen Kompaktheitskriterium (s. J. WLOKA, Funktionalanalysis u. Anwendungen, S.201) ist zu zeigen:

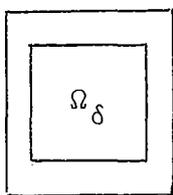
(i)  $M$  ist beschränkt in  $L_2(\Omega)$ ,

(ii)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall f \in M$

$$|h| < \delta \Rightarrow \int_{\Omega} |f(x+h) - f(x)|^2 dx < \varepsilon \quad (f(x) = 0 \text{ für } x \notin \Omega) .$$

(i) ist klar. (ii) zeigen wir für  $d = 2$  und  $\Omega = (0,1)^2$ . Sei  $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\}$ . Sei  $f \in C^1(\Omega)$  und  $0 < |h| < \delta$ .

Dann ist für  $x \in \Omega_\delta$ :



$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \frac{h}{|h|} \cdot \nabla f\left(x + t \frac{h}{|h|}\right) dt ,$$

$$|f(x+h) - f(x)|^2 \leq |h| \int_0^1 |\nabla f\left(x + t \frac{h}{|h|}\right)|^2 dt ,$$

$$\int_{\Omega_\delta} |f(x+h) - f(x)|^2 dx \leq |h| \int_0^1 \int_{\Omega_\delta} |\nabla f\left(x + t \frac{h}{|h|}\right)|^2 dx dt$$

$$\leq |h| \int_0^1 \|f\|_{H^1(\Omega)}^2 dt$$

$$= |h|^2 \|f\|_{H^1(\Omega)}^2 .$$

Weiter ist

$$\int_{\Omega - \Omega_\delta} |f(x+h) - f(x)|^2 dx \leq 4 \int_{\Omega - \Omega_{2\delta}} f^2(x) dx \quad .$$

Das rechte Integral kann man durch 4 Integrale der Form

$$\int_0^1 \int_0^{2\delta} f^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

abschätzen. Aus Satz 3.3 entnehmen wir

$$\int_0^1 \int_0^{2\delta} f^2(x_1, x_2) dx_2 \leq C \|f\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad .$$

Also folgt

$$\int_0^1 \int_0^{2\delta} f^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \leq C \int_0^{2\delta} \|f\|_{H^1(\Omega)}^2 dx_1 = 2\delta C \|f\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad .$$

Dies ergibt

$$\int_{\Omega - \Omega_\delta} |f(x+h) - f(x)|^2 dx \leq 32\delta C \|f\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad .$$

Insgesamt erhalten wir also für  $|h| < \delta$

$$\int_{\Omega} |f(x+h) - f(x)|^2 dx \leq (\delta^2 + 32\delta C) \|f\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad .$$

Nach Satz 2.4 gilt diese Ungleichung auch für  $f \in H^1(\Omega)$ . Für

$f \in M$  folgt also

$$\int_{\Omega} |f(x+h) - f(x)|^2 dx \leq \delta^2 + 32\delta C$$

für  $|h| < \delta$ , und dies impliziert (ii). ■

SATZ 3.5: Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet, sei  $\Gamma_0 \subseteq \partial\Omega$  eine Teilmenge von  $\partial\Omega$  mit positivem Oberflächenmaß. Dann gibt es eine Konstante  $C(\Omega)$ , so daß für alle  $f \in H^1(\Omega)$  mit  $f = 0$  auf  $\Gamma_0$

$$|f|_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\Omega) |f|_{H^1(\Omega)}$$

gilt.

BEWEIS: Wir setzen

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ auf } \Gamma_0\} .$$

Nach Satz 3.3 ist  $V$  ein Hilbertraum. Die Seminorm  $|v|_{H^1(\Omega)}$  ist auf  $V$  eine Norm: Aus  $|v|_{H^1(\Omega)} = 0$  folgt nach Übungsaufgabe 3, daß  $v$  eine Konstante ist, die wegen  $v = 0$  auf  $\Gamma_0$  Null sein muß.

Wir wollen nun annehmen, der Satz sei falsch. Dann gäbe es eine Folge  $(v_n)$  in  $V$  mit

$$\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 , \quad |v_n|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0 .$$

Nach Satz 3.4 könnten wir  $(v_n)$  in  $L_2(\Omega)$  als konvergent annehmen. Da  $(v_n)$  in  $L_2(\Omega)$  und bezüglich der Seminorm konvergiert, ist  $(v_n)$  sogar in  $H^1(\Omega)$  konvergent, etwa gegen  $v \in V$ , und wir haben

$$|v|_{H^1(\Omega)} = \lim_n |v_n|_{H^1(\Omega)} = 0 .$$

Also  $v = 0$  und damit  $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ , im Widerspruch zu

$$\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 .$$

■

BEMERKUNG: Für  $\Gamma_0 = \partial\Omega$  ist ein viel einfacherer Beweis möglich.  
Durch wiederholte Anwendung kann man für  $f \in H_0^s(\Omega)$

$$\|f\|_{H^s(\Omega)} \leq C(s, \Omega) |f|_{H^s(\Omega)}$$

zeigen. Dies ist die Poincaré'sche Ungleichung.

## § 4 RANDWERTPROBLEME ELLIPTISCHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Wir wenden nun den Satz von Lax-Milgram auf einige spezielle Aufgaben in Sobolev-Räumen an. Um partielle Integrationen durchführen zu können, stellen wir die Green'schen Formeln zur Verfügung.

**SATZ 4.1:** Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet, sei  $\sigma$  das Oberflächenmaß auf  $\partial\Omega$ , und sei  $\nu(x)$  die äußere Normale für f.a.  $x \in \partial\Omega$ . Dann gilt für  $u, v \in H^1(\Omega)$ ,  $i = 1, \dots, d$

$$(4.1) \quad \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\partial\Omega} uv \nu_i d\sigma \quad .$$

Ist  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $v \in H^2(\Omega)$ , so gilt

$$(4.2) \quad \int_{\Omega} u \Delta v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma$$

und für  $u, v \in H^2(\Omega)$

$$(4.3) \quad \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma \quad .$$

**BEWEIS:** Für  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  lautet der Gauß'sche Integralsatz

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} f \nu_i d\sigma \quad .$$

Für  $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  folgt (4.1), wenn man  $f = uv$  setzt. Für  $u, v \in H^1(\Omega)$  folgt dann (4.1) aus Satz 3.4. (4.2), (4.3) folgen aus (4.1). ■

**AUFGABE 1:** Sei  $f \in L_2(\Omega)$ . Gesucht ist  $u \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad .$$

Wir setzen

$$V = H_0^1(\Omega) , \quad a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx .$$

$a$  ist offenbar stetig auf  $V$  und nach Satz 3.5 auch  $V$ -elliptisch.

Das Funktional

$$F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$$

ist ebenfalls stetig auf  $V$ . Damit nimmt die Aufgabe die Form an:

Gesucht ist  $u \in V$  mit

$$a(u,v) = F(v) \quad , \quad v \in V$$

mit stetigem  $F$  und einer stetigen und  $V$ -elliptischen Bilinearform  $a$ . Der Satz von Lax-Milgram zeigt, daß  $u$  eindeutig bestimmt ist. Ist  $u \in H^2(\Omega)$ , so folgt aus (4.2)

für  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  sofort

$$\int_{\Omega} (-\Delta u) v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

oder

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

und natürlich

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega .$$

Wir haben also das Dirichlet-Problem für den Differentialoperator  $-\Delta$  gelöst.

AUFGABE 2: Sei  $f \in L_2(\Omega)$ ,  $g \in L_2(\partial\Omega)$ ,  $c \in C(\bar{\Omega})$ ,  $c(x) > 0$  in  $\bar{\Omega}$ .

Wir setzen

$$V = H^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + cuv) dx, \quad ,$$

$$F(v) = \int_{\Omega} fv dx + \int_{\partial\Omega} gv ds \quad .$$

$a$  ist wegen der Voraussetzungen über  $c$   $V$ -elliptisch, und  $F$  ist wegen Satz 3.3 stetig auf  $V$ . Also gibt es nach Lax-Milgram genau ein  $u \in H^1(\Omega)$  mit

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + cuv) dx = \int_{\Omega} fv dx + \int_{\partial\Omega} gv ds$$

für alle  $v \in H^1(\Omega)$ . Ist  $u \in H^2(\Omega)$ , so hat man mit (4.2)

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + cu - f)v dx = \int_{\partial\Omega} \left(g - \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) v d\sigma \quad .$$

Für  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  folgt zunächst

$$-\Delta u + cu = f \quad \text{in } \Omega \quad .$$

Danach folgt für  $v \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{auf } \partial\Omega \quad .$$

Wir haben also das Neumann'sche Problem für  $-\Delta + c$  gelöst.

AUFGABE 3: Sei  $f \in L_2(\Omega)$ . Sei  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ ,  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ , und  $\Gamma_0$  habe (als Teil von  $\partial\Omega$ ) positives Maß. Wir setzen

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ auf } \Gamma_0\} \quad .$$

Nach Satz 3.5 ist  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  eine Norm auf  $V$ .

Setzen wir nun mit  $f \in L_2(\Omega)$ ,  $g \in L_2(\Gamma_1)$

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_1} g v \, d\sigma,$$

so erhalten wir aus Lax-Milgram: Es gibt genau ein  $u \in V$  mit

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_1} g v \, d\sigma$$

für alle  $v \in V$ . Für  $u \in H^2(\Omega)$  bekommt man wie oben

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g && \text{auf } \Gamma_1. \end{aligned}$$

Wir haben also eine gemischte Randwertaufgabe gelöst.

AUFGABE 4: Sei

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^d \left( b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + d_i u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + c u v \right\} dx$$

mit  $a_{ij}, b_i, d_j, c \in C(\bar{\Omega})$ . Offenbar ist  $a$  eine stetige Bilinearform auf  $H^1(\Omega)$ . Wir machen folgende Annahme:

$$(i) \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall z \in \mathbb{R}^d \quad \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) z_i z_j \geq \alpha \sum_{i=1}^d z_i^2$$

$$(ii) \quad d_i, b_i \in C^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{und}$$

$$c - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (d_i + b_i) \geq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Für  $v \in H^1(\Omega)$  ist mit  $c_i = d_i + b_i$

$$a(v, v) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (c_i v^2) + \left( c - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial c_i}{\partial x_i} \right) v^2 \right\} dx.$$

Für  $v \in H_0^1(\Omega)$  verschwindet die mittlere Summe, und wir haben wegen (i); (ii)

$$a(v, v) \geq \alpha \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx = \alpha |v|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Da  $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$  auf  $V = H_0^1(\Omega)$  eine Norm ist, ist  $a$   $V$ -elliptisch.

Für jedes  $f \in L_2^1(\Omega)$  gibt es also nach Lax-Milgram genau ein  $u \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ist  $u$  sogar in  $H^2(\Omega)$ , so erfüllt  $u$  nach (4.1)

$$-\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^d \left( b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (d_i u) \right) + cu = f \quad \text{in } \Omega,$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

AUFGABE 5: Sei  $f \in L_2(\Omega)$ ,

$$V = H_0^2(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v dx, \quad F(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Auf  $V$  ist  $|\cdot|_{H^2(\Omega)}$  eine Norm, welche zur Norm in  $H_0^2(\Omega)$  äquivalent ist. Nach Übungsaufgabe 8 ist

$$a(v, v) \geq |v|_{H^2(\Omega)}^2, \quad \forall v \in V.$$

Also ist  $a$   $V$ -elliptisch, und natürlich ist  $F$  stetig auf  $V$ .

Also gibt es nach Lax-Milgram genau ein  $u \in V$  mit

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad , \quad v \in V \quad .$$

Ist sogar  $u \in H^4(\Omega)$ , so ist nach Satz 4.1

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx &= \int_{\Omega} \Delta^2 u \cdot v \, dx + \int_{\partial\Omega} \left( -v \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u - \Delta u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \Delta^2 u \cdot v \, dx \quad , \end{aligned}$$

denn wegen  $u \in H_0^2(\Omega)$  ist  $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  auf  $\partial\Omega$ . Also löst  $u$

$$\Delta^2 u = f \quad \text{in } \Omega \quad , \quad u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad .$$

Dies ist ein Randwertproblem für eine Differentialgleichung 4. Ordnung.

#### AUFGABE 6: Elastizitätstheorie ebener isotroper Platten.

Wir betrachten eine dünne Platte der Dicke  $d$  und setzen diese einer Verzerrung  $x \rightarrow x' = x + u(x)$  aus. Die Dehnungen  $\varepsilon_{ii}$  sind die relativen Längenänderungen einer infinitesimalen Strecke in Richtung des  $i$ -ten Einheitsvektors  $e_i$ , und  $\varepsilon_{12}$  gibt den Winkel  $\alpha$  zwischen zwei orthogonalen infinitesimalen Vektoren nach der Verzerrung an:  $\cos \alpha = 2\varepsilon_{12}$ . Für kleine Verzerrungen kann man zeigen, daß

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad .$$

Die  $\varepsilon_{ik}$  werden zum Dehnungstensor

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{B}u, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

zusammengefaßt.

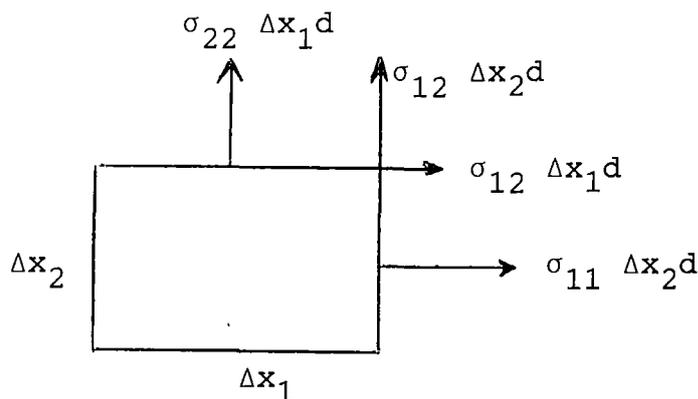
Die in der Platte wirkenden Kräfte stellt man sich als Nahwirkungskräfte vor, welche an Flächen angreifen. Ist  $\nu$  der Normalenvektor eines infinitesimalen Flächenstücks mit Flächeninhalt  $\Delta$ , so ist die auf dieses Flächenstück wirkende Kraft in Richtung von  $e_i$

$$\sum_{k=1}^2 \sigma_{ik} \nu_k \Delta \quad .$$

Die Zahlen  $\sigma_{ik}$  bilden den Spannungstensor

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} ;$$

es ist stets  $\sigma_{21} = \sigma_{12}$ .  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  heißen Hauptspannung,  $\sigma_{12}$  Schubspannung. Die auf ein rechteckiges Flächenelement  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_2$  wirkenden Kräfte sind: (Die Spannungen werden über die Plattendicke  $d$  als konstant angenommen.)



Der Zusammenhang zwischen  $\epsilon$ ,  $\sigma$  wird durch das Hooke'sche Gesetz vermittelt:

$$\sigma = D\epsilon, \quad D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}.$$

$E$  ist der Elastizitätsmodul des Materials.  $\nu$  ist die Poisson'sche Querszahl, ebenfalls eine Materialkonstante: Unterwirft man ein kleines Rechteck in der einen Richtung einer Dehnung  $\epsilon$ , so bedeutet dies eine Stauchung  $\nu\epsilon$  in der orthogonalen Richtung.

Die Kraftverteilung  $f(x)$  innerhalb der gemäß  $u$  verschobenen Platte, welche mit den elastischen Kräften im Gleichgewicht ist, berechnen wir nun nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen. Dazu berechnen wir die Arbeit, die eine weitere, gedachte (virtuelle) Verzerrung  $v$  der bereits gemäß  $u$  verschobenen Platte erfordert. Eine Dehnung  $\epsilon$  beim Spannungszustand  $\sigma$  erfordert pro Volumeneinheit die Arbeit  $\epsilon^T \sigma$ , eine Verschiebung  $v$  gegen die Kraftverteilung  $f$  pro Volumenelement  $-f^T v$ . Insgesamt erfordert die Verschiebung  $v$  also die Arbeit

$$\int ((Bv)^T D B u - f^T v) dx.$$

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen verlangt, daß diese Arbeit für jedes  $v = 0$  ist, und zwar für alle virtuellen Verzerrungen  $v$ , welche mit den geometrischen Nebenbedingungen (z.B. Einspannung der Platte am Rand) verträglich sind.

Sei nun  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^2$  und  $\Omega \times [0, d]$  unsere Platte. Die Platte sei der Volumenkraft  $f \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  ausgesetzt. Seien

$\Gamma_1, \Gamma_2$  Teile von  $\partial\Omega$  mit positivem Oberflächenmaß, und sei die Verzerrung in Richtung  $x_i$  auf  $\Gamma_i$  als 0 vorgeschrieben. Sei

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) : v_i = 0 \text{ auf } \Gamma_i\} .$$

$V$  ist nach Satz 3.5 ein Hilbertraum mit der Norm

$$|v|_V^2 = |v_1|_{H^1(\Omega)}^2 + |v_2|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx .$$

Für  $u, v \in V$  setzen wir

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (Bv)^T D B u \, dx \quad , \quad F(v) = \int_{\Omega} f^T v \, dx .$$

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen führt nun unmittelbar auf die Variationsgleichung: Gesucht ist  $u \in V$

$$a(u, v) = F(v) \quad , \quad \forall v \in V .$$

**SATZ 4.2 (Korn'sche Ungleichung):** Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet,  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \partial\Omega$  haben positives Oberflächenmaß, und  $0 \leq \nu < 1$ . Dann ist  $a$   $V$ -elliptisch.

**BEWEIS:** Es ist

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} dx \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right\} dx . \end{aligned}$$

Wir führen den Beweis nur für den Fall  $\Gamma_1 = \partial\Omega$ . Für den allgemeineren Fall siehe

V  
NECAS, J. - HLAVACEK, I.: Mathematical Theory of Elastic and Alasto-Plastic Bodies: An Introduction. Elsevier 1981.

Wir zeigen, daß für  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,  $v \in H^1(\Omega)$

$$(4.4) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx$$

gilt. Es genügt, diese Beziehung für  $v_1 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $v_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  zu beweisen. Dann ist

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} v_1 \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} v_1 \right) + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} .$$

Aus dem Gauß'schen Integralsatz folgt

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx = \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} v_1 v_2 - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} v_1 v_1 \right) d\sigma + \int_{\Omega} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx .$$

Wegen  $v_1 = 0$  auf  $\partial\Omega$  folgt (4.4).

Mit (4.4) erhält man durch Ausmultiplizieren

$$a(v, v) = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + (1+\nu) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right\} dx .$$

Beim letzten Term rechts benutzt man  $ab \geq -\frac{1}{2}(a^2+b^2)$  und erhält

$$a(v, v) \geq \frac{E}{1-\nu^2} \int_{\Omega} \frac{1-\nu}{2} \sum_{i,j=1}^2 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx = \frac{E}{2(1+\nu)} |v|_V^2 .$$

## § 6 DAS EINZELNE FINITE ELEMENT

DEFINITION 6.1: Ein Finites Element ist ein Tripel  $(E, \mathcal{P}, \Phi)$ , wobei

$E$  ein Lipschitz-Gebiet in  $\mathbb{R}^d$ ,

$\mathcal{P}$  ein endlichdimensionaler Teilraum von  $C(\bar{E})$ ,

$\Phi$  eine Menge linear unabhängiger linearer Funktionale auf  $\mathcal{P}$

ist.

BEMERKUNGEN:

- 1)  $E$  ist in der Regel ein sehr einfaches Gebiet, wie etwa Quader, Tetraeder.  $d$  heißt die Dimension des Finiten Elements. Oft wird  $E$  auch selbst als Finite Element oder Element bezeichnet.
- 2)  $\mathcal{P}$  besteht aus sehr einfachen Funktionen, in der Regel Polynomen. Die Dimension  $m$  von  $\mathcal{P}$  ist niedrig, etwa 3 - 20.
- 3)  $\Phi$  besteht meist aus Funktionsauswertungen oder Auswertungen von Ableitungen in gewissen Punkten von  $\bar{E}$ , den Knoten. Die Funktionale in  $\Phi$  nennt man auch Freiheitsgrade des Elements.
- 4) Sei  $m$  die Dimension von  $\mathcal{P}$ . Dann besteht  $\Phi$  aus  $m$  l.u. Funktionalen  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ , und das Interpolationsproblem

$$(6.1) \quad p \in \mathcal{P}, \quad \varphi_i(p) = p_i, \quad i = 1, \dots, m$$

ist für jede Wahl von  $p_1, \dots, p_m$  eindeutig lösbar. Diese Eigenschaft nennt man "Unisolvenz" des Finiten Elements.

5) Insbesondere gibt es also für jedes  $j$  genau ein  $N_j \in \mathcal{P}$  mit

$$\varphi_i(N_j) = \begin{cases} 1 & , \quad j = i & , \\ 0 & , \quad j \neq i & . \end{cases}$$

Die  $N_j$  heißen Formfunktionen des Finiten Elements. Mit Hilfe der Formfunktionen kann man die Lösung des Interpolationsproblems (6.1) in der Form

$$p = \sum_{i=1}^m p_i N_i$$

schreiben. Zum Nachweis der Unisolvenz genügt es, die Formfunktionen anzugeben.

Wir besprechen nun spezielle Finite Elemente. Ihre Bezeichnung bezieht sich

auf  $E$  : dreieckig, rechteckig, ...

auf  $\mathcal{P}$  : linear, quadratisch falls  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ , wo  $\mathcal{P}_n$  die Menge der Polynome vom Grade  $\leq n$  bezeichnet.

und auf  $\Phi$  : Lagrange'sch für Funktionsauswertungen,  
Hermite'sch für Auswertungen der Ableitungen, ...

Wir beschränken uns dabei zunächst auf ebene Elemente ( $d = 2$ ).

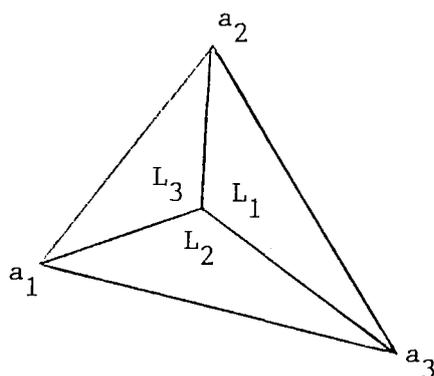
### 1. Dreieckig - Lagrange'sche Elemente.

Hier ist  $\bar{E}$  ein Dreieck mit den Ecken  $a_1, a_2, a_3$  :  $\bar{E} = \Delta(a_1, a_2, a_3)$

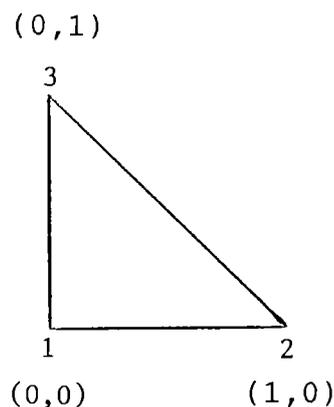
(a) Bei den linearen Elementen dieser Klasse ist  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ , also  $m = 3$ ,  $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ ,  $\varphi_i(p) = p(a_i)$   $a_1, a_2, a_3$  sind also die Knoten des Elements. Wir schreiben kurz  $\Phi = \{p(a_i), i=1,2,3\}$ . Die

Formfunktionen erhält man aus den baryzentrischen Koordinaten  $L_i(x)$ , z.B.

$$(6.2) \quad L_1(x) = \frac{|\Delta(x, a_2, a_3)|}{|\Delta(a_1, a_2, a_3)|} \quad .$$



Baryzentrische Koordinaten



Einheitsdreieck

Analytisch kann man die baryzentrischen Koordinaten in  $\bar{E}$  durch die Gleichungen

$$x = L_1 a_1 + L_2 a_2 + L_3 a_3$$

$$1 = L_1 + L_2 + L_3$$

definieren. Auflösen nach  $L_1$  ergibt nach der Cramer'schen Regel

$$(6.3) \quad L_1 = \det \begin{pmatrix} x & a_2 & a_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Nun gilt

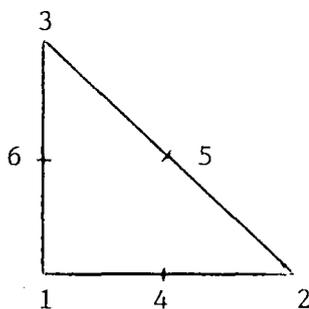
$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & a_2 & a_3 - a_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\det(a_1 - a_2, a_3 - a_2) \quad . \end{aligned}$$

$|\det( a_1-a_2 , a_3-a_2 )|$  ist gerade die Fläche des von  $a_1-a_2, a_3-a_2$  aufgespannten Parallelogramms. Für  $x \in \bar{E}$  ist  $L_1 \geq 0$ , und (6.2), (6.3) stimmen überein.

Offenbar ist  $L_i \in \mathcal{F}_1$ . Also sind  $N_i = L_i$  die Formfunktionen. Für das Einheitsdreieck ist z.B.

$$N_1(x) = 1-x_1-x_2 \quad , \quad N_2(x) = x_1 \quad , \quad N_3(x) = x_2 \quad .$$

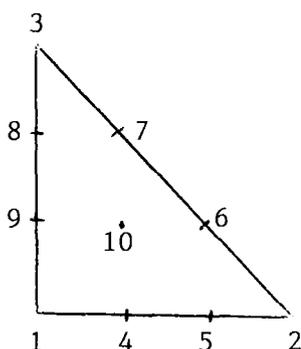
(b) Die quadratischen Elemente dieser Klasse haben  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$ , also  $m = 6$ . Als Knoten treten die Ecken  $a_1, a_2, a_3$  und die Seitenmittelpunkte  $a_4, a_5, a_6$  auf. Für das Einheitsdreieck hat man die Formfunktionen:



$$N_1(x) = (1-x_1-x_2)(1-2x_1-2x_2) \quad , \quad N_5(x) = 4x_1x_2$$

$$N_2(x) = x_1(1-2x_2) \quad , \quad N_4(x) = 4x_1(1-x_1-x_2)$$

(c) Für die kubischen Elemente ist  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_3$ , also  $m = 10$ . Als Knoten treten die Ecken  $a_1, a_2, a_3$  auf, weiter die Punkte  $a_5, \dots, a_9$ , welche die Kanten in 3 gleiche Teile teilen, und schließlich der Schwerpunkt  $a_{10} = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$ :



$$N_1(x) = (1-x_1-x_2)(1-\frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2)(1-3x_1 - 3x_2) \quad ,$$

$$N_2(x) = x_1(1-\frac{3}{2}x_1)(1-3x_1) \quad , \quad N_{10}(x) = 27x_1x_2(1-x_1-x_2)$$

$$N_4(x) = 9x_1(1-x_1-x_2)(1-\frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2) \quad ,$$

$$N_5(x) = x_1(1-x_1-x_2)(1-3x_1) \quad , \quad N_6(x) = -\frac{9}{4}x_1x_2(1-3x_1)$$

2. Dreieckig kubische Hermite'sche Elemente.

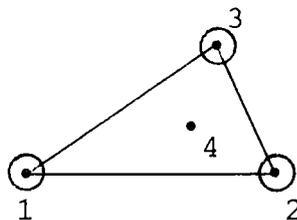
Hier ist  $\mathcal{F} = \mathcal{P}_3$ ,  $m = 10$ ,  $a_1, a_2, a_3$  die Ecken,  $a_4$  der Schwerpunkt,

$$\Phi = \{p(a_\ell), D^\alpha p(a_\ell), \ell = 1, 2, 3 \text{ und } |\alpha| \leq 1, \ell = 4 \text{ und } \alpha = 0\}.$$

Es ist jetzt zweckmäßig, für die Freiheitsgrade graphische Symbole einzuführen:

Funktionale	Symbol	Anzahl der Funktionale
$p(a)$	$\bullet_a$	1
$D^\alpha p(a),  \alpha  \leq 1$	$\odot_a$	3
$D^\alpha p(a),  \alpha  \leq 2$	$\otimes_a$	6
$\frac{\partial p}{\partial v}(a)$	$\nearrow_a$	1

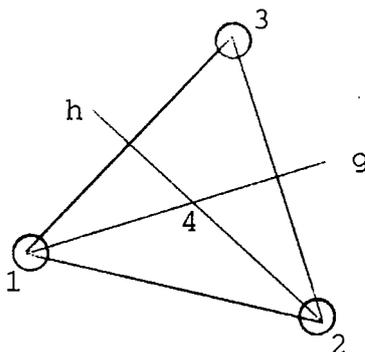
Damit sieht unser Element so aus:



Die Unisolvenz folgt aus

SATZ 6.1: Seien  $a_1, a_2, a_3$  die Ecken eines Dreiecks  $E$  und  $a_4$  der Schwerpunkt, d.h.  $a_4 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$ . Sei  $p \in \mathcal{P}_3$  und  $D^\alpha p(a_i) = 0, i=1, 2, 3, |\alpha| \leq 1, p(a_4) = 0$ . Dann ist  $p = 0$ .

BEWEIS: Auf 13 ist  $p$  ein



Polynom vom Grade 3, welches in 1,3 jeweils 2 Nullstellen hat. Also ist  $p = 0$  auf 13 und damit  $p = 0$  auf allen Kanten. Auf  $g$  hat  $p$  dann ebenfalls vier Nullstellen und ist dort 0. Ist  $h$  eine beliebige Gerade durch 2, welche 13 trifft, so hat  $p$  auf  $h$  wieder 4 Nullstellen und ist 0 auf  $h$  und damit identisch 0.

Die Formfunktionen sind hier nicht so leicht zu erraten. Ein systematischer Weg ist der folgende: Es ist für  $p \in \mathcal{P}_3$

$$p(x) = \sum_{|\beta| \leq 3} c_\beta x^\beta \quad .$$

Das Interpolationsproblem

$$D^\alpha p(a_\ell) = p_{\ell, \alpha} \quad , \quad \ell = 1, 2, 3 \quad , \quad |\alpha| \leq 1$$

$$p(a_4) = p_4$$

ist eindeutig lösbar. Es führt beim Einheitsdreieck auf das Gleichungssystem  $Ac = b$  mit  $A, b$  wie folgt:

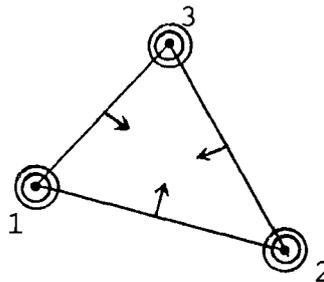
$c_{00}$	$c_{10}$	$c_{01}$	$c_{20}$	$c_{11}$	$c_{02}$	$c_{30}$	$c_{21}$	$c_{12}$	$c_{03}$	
1										$P_{100}$
	1									$P_{110}$
		1								$P_{101}$
1	1		1			1				$P_{200}$
	1		2			3				$P_{210}$
		1		1			1			$P_{201}$
1	1		1			1				$P_{300}$
	1			1				1		$P_{310}$
		1			2				3	$P_{301}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$	$P_4$

Numerieren wir die Freiheitsgrade wie die rechten Seiten, also  $p(a_1)$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_1} p(a_1)$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_2} p(a_1), \dots, p(a_4)$ , so erhält die  $i$ -te Spalte von  $A^{-1}$  die Koeffizienten von  $N_i$ , z.B.

$$N_1(x) = 1 - 3x_1^2 - 13x_1x_2 - 3x_2^2 + 2x_1^3 + 13x_1^2x_2 + 13x_2^2x_1 + 2x_2^3$$

3. Dreieckig Hermite'sches Element 5. Grades (Argyris-Dreieck).

Hier ist  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_5$ , und  $\phi$  entnimmt man der Figur:

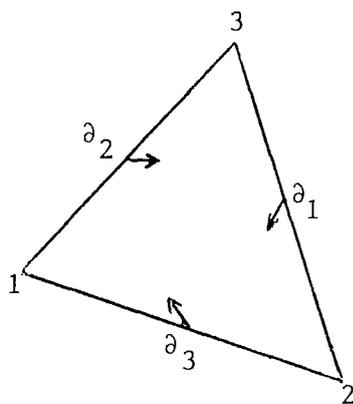


In den Seitenmittelpunkten sind nur die Normalableitungen, nicht

die Funktionswerte gemeint. Es ist  $m = 21$ . Die Unisolvenz folgt aus

SATZ 6.2: Sei  $b_1$  ein innerer Punkt der Kante  $a_2a_3$ , und entsprechend  $b_2, b_3$ . Sei  $p \in \mathcal{P}_5$  und  $D^\alpha p(a_\ell) = 0$ ,  $\ell = 1, 2, 3$ ,  $|\alpha| \leq 2$ . Seien  $\partial_\ell$  Ableitungen in  $b_\ell$  nicht in Richtung der jeweiligen Kante. Sei  $\partial_\ell p(b_\ell) = 0$ ,  $\ell = 1, 2, 3$ . Dann ist  $p = 0$ .

BEWEIS:



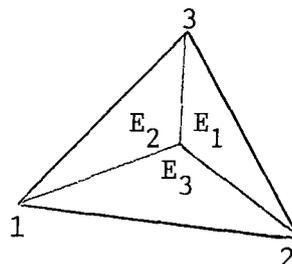
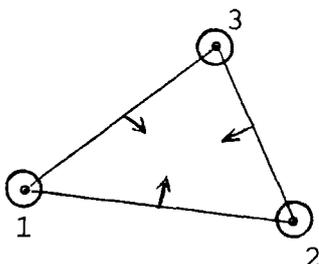
Ähnlich wie beim Beweis zu Satz 6.1 folgt zunächst  $p = 0$  auf den Kanten. Entlang 13 ist  $\partial_2 p$  ein Polynom vom Grade 4 mit 5 Nullstellen, also ist  $\partial_2 p = 0$  entlang 13. Damit verschwinden alle Ableitungen von  $p$  entlang 13, insbesondere  $\partial p / \partial L_1$ . Also enthält  $p$  mindestens einen Faktor  $L_1^2$ . Nach dem gleichen Schluß enthält  $p$  aber auch Faktoren  $L_2^2$  und  $L_3^2$ . Also enthält  $p$  sogar einen Faktor  $L_1^2 L_2^2 L_3^2$  und muß daher wegen  $p \in \mathcal{P}_5$  verschwinden. ■

3. Dreieckig Hermite'sches Spline-Element (HCT, Hsieh-Clough-Tocher-Element).

Hier wird  $E$  in Teildreiecke  $E_1, E_2, E_3$  aufgeteilt und

$$\mathcal{P} = \{p \in C^1(\bar{E}) : p|_{\bar{E}_i} \in \mathcal{P}_3\}$$

gesetzt; die Freiheitsgrade entnimmt man der Zeichnung.



SATZ 6.3: HCT ist unisolvent, und  $\dim \mathcal{P} = 12$ .

BEWEIS: Wir zeigen zunächst Unisolvenz. Sei also  $p \in \mathcal{P}$  und  $D^\alpha p(a_\ell) = 0$ ,  $\ell = 1, 2, 3$ ,  $|\alpha| \leq 1$  sowie  $\partial_\nu p(b_1) = 0$ , wo  $b_1$  ein innerer Punkt der Kante 23 ist und  $\nu$  eine Normalableitung bedeutet. Wir müssen  $p = 0$  zeigen. Sei dazu  $a$  der gemeinsame Punkt von  $\bar{E}_i$ ,  $i=1, 2, 3$ , und sei  $q \in C(\bar{E})$  eine Funktion mit  $q|_{\bar{E}_i} \in \mathcal{P}_1$  und  $q(a) = 1$ ,  $q(a_\ell) = 0$ ,  $\ell = 1, 2, 3$ . Wie bei den früheren Beweisen sieht man, daß  $p$  entlang der Kanten samt seiner Normalableitung verschwindet und daher den Faktor  $q^2$  enthalten muß. Also  $p = rq^2$  mit  $r_i = r|_{\bar{E}_i} \in \mathcal{P}_1$ . Sei  $T = \bar{E}_i \cap \bar{E}_k$ . Entlang  $T$  gilt für  $|\alpha| \leq 1$

$$D^\alpha p = D^\alpha r_i q_i^2 + 2r_i q_i D^\alpha q_i = D^\alpha r_k q_k^2 + 2r_k q_k D^\alpha q_k .$$

Wegen  $q, p \in C(\bar{E})$  ist auch  $r \in C(\bar{E})$  und damit  $q_i = q_k$  und  $r_i = r_k$  entlang  $T$ . Es folgt entlang  $T$

$$(D^\alpha r_i - D^\alpha r_k) q^2 + 2rq(D^\alpha q_i - D^\alpha q_k) = 0$$

und nach Kürzung eines Faktors  $q$

$$(D^\alpha r_i - D^\alpha r_k) q + 2r(D^\alpha q_i - D^\alpha q_k) = 0 .$$

In dem von  $a$  verschiedenen Endpunkt von  $T$  ist  $q = 0$  und  $D^\alpha q_i \neq D^\alpha q_k$  für mindestens ein  $\alpha$ . Also ist dort  $r = 0$ . Es ist also  $r \in C(\bar{E})$ ,  $r|_{\bar{E}_i} \in \mathcal{P}_1$  und  $r(a_\ell) = 0$ ,  $\ell = 1, 2, 3$ . Die einzige solche Funktion ist  $r = cq$  mit einer Konstanten  $c$ . Damit ist  $p = cq^3$ . Eine solche Funktion kann aber nur dann in  $C^1(\bar{E})$  sein, wenn  $c = 0$ . Also in der Tat  $p = 0$ .

Es bleibt noch  $\dim \mathcal{P} = 12$  zu zeigen. Wegen der Unisolvenz ist klar, daß  $\dim \mathcal{P} \leq 12$  ist.  $\mathcal{P}' = \{p : p|_{\bar{E}_i} \in \mathcal{P}_3\}$  hat die Dimension 30. Wir konstruieren 18 lineare Funktionale  $\varphi_i$  auf  $\mathcal{P}'$  mit der Eigenschaft

$$p \in \mathcal{P}', \quad \varphi_i(p) = 0, \quad i = 1, \dots, 18 \Rightarrow p \in \mathcal{P}.$$

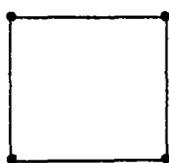
Dann ist  $\dim \mathcal{P} \geq 30 - 18 = 12$  und damit alles gezeigt.

$\varphi_1(p), \dots, \varphi_9(p)$  sind die Sprünge von  $D^\alpha p$  bei  $a_1, a_2, a_3, \varphi_{10}(p), \dots, \varphi_{12}(p)$  die Sprünge der Normalableitungen an den Mittelpunkten von  $aa_\ell$ ,  $\ell = 1, 2, 3$ .  $\varphi_{13}(p), \dots, \varphi_{18}(p)$  sind die Sprünge von  $D^\alpha p$ ,  $|\alpha| \leq 1$  entlang  $aa_1, aa_2$  bei  $a$ . (Verschwinden diese, so auch der Sprung entlang  $aa_3$  bei  $a$ .)

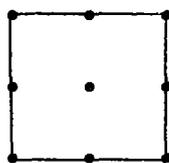
Ist nun  $p \in \mathcal{P}'$  und  $\varphi_i(p) = 0$  für  $i = 1, \dots, 18$ , so ist der Sprung von  $p$  entlang  $aa_\ell$  aus  $\mathcal{P}_3$  und hat in jedem Endpunkt 2 Nullstellen. Der Sprung von  $\partial p / \partial \nu$  ist dort ein Polynom vom Grade 2 mit Nullstellen in den Endpunkten und im Mittelpunkt. Also sind beide Sprünge 0 und damit  $p \in \mathcal{P}$ .

5. Lagrange'sche Elemente in Rechtecken.

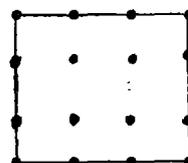
Hier ist  $\bar{E}$  ein Rechteck und  $\mathcal{P} = \bar{\mathcal{P}}_n = \{p : p = \sum_{0 \leq \alpha_i \leq n} c_\alpha x^\alpha\}$ , also  $m = (n+1)^2$ . Die Knoten für das Einheitsrechteck  $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$  sind  $a_{k\ell} = (k/n, \ell/n)$ ,  $k, \ell = 0, \dots, n$ :



bilinear



biquadratisch



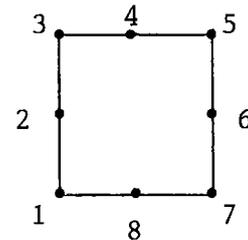
bikubisch

Unisolvenz ist hier trivial.

6. Rechteckige Elemente der Serendipity<sup>1)</sup>-Klasse.

Für das quadratische Element dieser Klasse ist  $m = 8$  und

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 + \langle x^2 y, xy^2 \rangle$$



Der Beweis der Unisolvenz geschieht durch Angabe der Formfunktionen. Nehmen wir den Mittelpunkt im Ursprung und die Ecken in  $a_\ell = (\pm 1, \pm 1)$ , so ist für die Ecken

$$N_\ell(x) = \frac{1}{4} (1 + x_1 a_{\ell 1})(1 + x_2 a_{\ell 2})(x_1 a_{\ell 1} + x_2 a_{\ell 2} - 1)$$

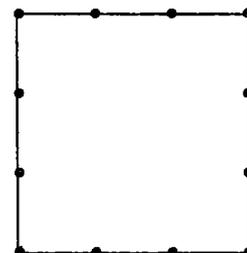
und für die Seitenmittelpunkte z.B.

$$N_2(x) = \frac{1}{2} (1 - x_2^2)(1 - x_1)$$

Im NAG-Programm hat dieses Element die Bezeichnung QU8FN.

Das kubische Serendipity-Element ist gegeben durch

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_3 + \langle x^3 y, y^3 x \rangle$$



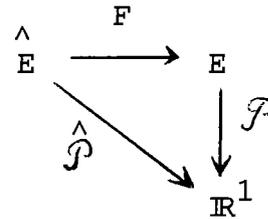
1) serendipity (engl.) = Gabe, durch Zufall glückliche und unerwartete Entdeckungen zu machen. (Horace Walpole: The Three Princes of Serendip)

Es ist also  $m = 12$ . Bei NAG hat dieses Element die Bezeichnung QU12FN.

Aus einem Element  $(\hat{E}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\Phi})$  kann man mittels umkehrbar eindeutiger Abbildungen  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  ein neues Element  $(E, \mathcal{P}, \Phi)$  herstellen mit

$$E = F(\hat{E})$$

$$\mathcal{P} = \hat{\mathcal{P}} \circ F^{-1}$$



$$\Phi = \{ \varphi : \varphi(p) = \hat{\varphi}(p \circ F) \quad \text{mit} \quad \hat{\varphi} \in \hat{\Phi} \}.$$

Für ein Lagrange'sches Element mit Knoten  $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m$  hat  $\Phi$  also einfach die Knoten  $F(\hat{a}_1), \dots, F(\hat{a}_m)$ .

Bei den isoparametrischen Elementen wählt man  $F \in \hat{\mathcal{P}}$ . Sei  $(\hat{E}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\Phi})$  ein Lagrange'sches Element mit Knoten  $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m$ . Für das isoparametrische Element gibt man die Knoten  $a_1, \dots, a_m$  vor. Die Abbildung

$$F = \sum_{\ell=1}^m a_{\ell} \hat{N}_{\ell} \quad , \quad \hat{N}_{\ell} \text{ Formfunktionen in } \hat{\mathcal{P}},$$

führt die Knoten  $\hat{a}_{\ell}$  in die neuen Knoten  $a_{\ell}$  über. Ist  $F$  invertierbar, so definiert  $F$  ein neues Element  $(E, \mathcal{P}, \Phi)$  mit den Knoten  $a_1, \dots, a_m$ . Dieses Element ist i.a. nicht mehr geradlinig begrenzt, und seine Funktionenklasse enthält i.a. algebraische Funktionen, selbst wenn  $\hat{\mathcal{P}}$  nur Polynome enthielt. Dies stört aber nicht, da wir alle Rechnungen auf dem "Referenzelement"  $(\hat{E}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{\Phi})$  durchführen werden.

## § 7 APPROXIMATION IM EINZELNEN FINITEN ELEMENT

Sei  $(E, \mathcal{P}, \Phi)$  ein Finites Element, und sei  $f \in H^s(E)$ . Wir wollen untersuchen, wie gut man  $f$  durch Funktionen aus  $\mathcal{P}$  approximieren kann.

SATZ 7.1 (Bramble-Hilbert-Lemma): Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet in  $\mathbb{R}^d$ .

Dann gibt es eine Konstante  $C$ , so daß

$$\forall f \in H^s(\Omega) \quad \inf_{p \in \mathcal{P}_{s-1}} \|f-p\|_{H^s(\Omega)} \leq C |f|_{H^s(\Omega)} .$$

BEWEIS: Seien  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  stetige lineare Funktionale auf  $H^s(\Omega)$ , so daß  $\varphi_i(p) = 0$ ,  $i=1, \dots, n$  für  $p \in \mathcal{P}_{s-1}$  nur für  $p = 0$  möglich ist. Wir zeigen: Es gibt eine Konstante  $C$ , die von  $\Omega, s$  und den  $\varphi_i$  abhängt, so daß für  $f \in H^s(\Omega)$

$$(7.1) \quad \|f\|_{H^s(\Omega)} \leq C \left\{ |f|_{H^s(\Omega)} + \sum_{i=1}^n |\varphi_i(f)| \right\} .$$

Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es eine Folge  $(f_k)$  in  $H^s(\Omega)$  mit

$$\|f_k\|_{H^s(\Omega)} = 1, \quad |f_k|_{H^s(\Omega)} + \sum_{i=1}^n |\varphi_i(f_k)| \rightarrow 0$$

für  $k \rightarrow \infty$ . Nach Satz 3.4 können wir  $(f_k)$  in  $H^{s-1}(\Omega)$  als konvergent annehmen. Wegen  $|f_k|_{H^s(\Omega)} \rightarrow 0$  ist  $(f_k)$  sogar in  $H^s(\Omega)$  konvergent, etwa gegen  $f \in H^s(\Omega)$ . Wegen

$$|f_k|_{H^s(\Omega)} \rightarrow |f|_{H^s(\Omega)}, \quad \varphi_i(f_k) \rightarrow \varphi_i(f)$$

ist

$$|f|_{H^s(\Omega)} = 0, \quad \varphi_i(f) = 0, \quad i=1, \dots, n.$$

Also  $f \in \mathcal{P}_{s-1}$ , und nach Wahl der  $\varphi_i$  ist  $f = 0$ . Dies ist ein Widerspruch zu

$$\|f\|_{H^s(\Omega)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_{H^s(\Omega)} = 1.$$

Damit ist also (7.1) gezeigt.

Zu  $f \in H^s(\Omega)$  gibt es  $p_f \in \mathcal{P}_{s-1}$  mit  $\varphi_i(p_f - f) = 0, \quad i=1, \dots, n$ .

Dann ist nach (7.1)

$$\begin{aligned} \inf_{p \in \mathcal{P}_{s-1}} \|f-p\|_{H^s(\Omega)} &\leq \|f-p_f\|_{H^s(\Omega)} \\ &\leq C \left\{ |f-p_f|_{H^s(\Omega)} + \sum_{i=1}^n |\varphi_i(p_f-f)| \right\} \\ &= C |f|_{H^s(\Omega)}. \end{aligned}$$

Sei nun  $(E, \mathcal{P}, \Phi)$  ein Finites Element. Es sei  $\mathcal{P} \subseteq H^s(E)$ , und seine Freiheitsgrade seien stetige lineare Funktionale auf  $H^s(E)$ . Nach Satz 3.2 ist dies etwa der Fall, wenn alle Freiheitsgrade von der Form  $D^\alpha p(a_\ell)$ ,  $|\alpha| < s - d/2$ ,  $a_\ell \in \bar{E}$  sind. Wegen der Unisolvenz gibt es dann für jedes  $f \in H^s(E)$  genau ein  $p \in \mathcal{P}$  mit  $\varphi(p-f) = 0 \quad \forall \varphi \in \Phi$ . Wir nennen dieses  $p = Pf$ . Offenbar ist  $P$  eine Projektion von  $H^s(E)$  auf  $\mathcal{P}$ , d.h.  $P$  ist linear, stetig, und  $P^2 = P$ .

**SATZ 7.2:** Sei  $\mathcal{P}_{r-1} \subseteq \mathcal{P}$  und  $r \geq s$ . Dann gibt es eine Konstante  $C$ , so daß

$$\forall f \in H^r(E) \quad \|f-Pf\|_{H^s(E)} \leq C|f|_{H^r(E)} .$$

BEWEIS: Es ist für  $p \in \mathcal{J}$

$$\begin{aligned} \|f-Pf\|_{H^s(E)} &= \|(I-P)f\|_{H^s(E)} \\ &= \|(I-P)(f-p)\|_{H^s(E)} \\ &\leq \|I-P\| \|f-p\|_{H^s(E)} , \end{aligned}$$

also

$$\|f-Pf\|_{H^s(E)} \leq C \inf_{p \in \mathcal{J}} \|f-p\|_{H^s(E)} .$$

Die Behauptung folgt nun nach Satz 7.1. ■

Sei nun  $h$  eine "kleine" positive Zahl. Wir erzeugen aus einem Referenzelement  $(E, \mathcal{P}, \phi)$  ein Element  $(E_h, \mathcal{P}_h, \phi_h)$  der "Größe"  $h$  durch affine Abbildung  $F_h : E \rightarrow E_h$ , wobei

$$F_h x = b_h + hB_h x .$$

Um zu verhindern, daß  $E_h$  degeneriert oder fast degeneriert, verlangen wir

$$(7.2) \quad k(B_h) \leq C \quad (k(B) = \text{Kondition von } B)$$

mit einer von  $h$  unabhängigen Konstanten  $C$ . Äquivalent hierzu ist die Existenz von positiven, von  $h$  unabhängigen Konstanten  $C_1, C_2$  mit

$$(7.3) \quad K_{C_1 h} \subseteq E_h \subseteq K_{C_2 h}$$

mit Kugeln  $K_h$  vom Radius  $h$ .

SATZ 7.3: Sei  $\mathcal{P}_{r-1} \subseteq \mathcal{P}$  und  $r \geq s \geq t$ . Dann gibt es eine Konstante  $C$ , so daß für die zu  $(E_h, \mathcal{P}_h, \Phi_h)$  gehörige Projektion  $P_h$

$$\forall f \in H^r(E_h) \quad \|f - P_h f\|_{H^t(E_h)} \leq C h^{r-t} |f|_{H^r(E_h)} .$$

BEWEIS: Wegen (7.2) genügt es, den Satz für  $F_h = hI$  zu beweisen.

Wir setzen  $f_h = f \circ F_h^{-1}$ , also  $f_h(x) = f(x/h)$ . Wir haben

$$(D^\alpha f_h)(x) = h^{-|\alpha|} (D^\alpha f)\left(\frac{x}{h}\right) ,$$

$$\begin{aligned} \int_{E_h} (D^\alpha f_h)^2(x) dx &= h^{-2|\alpha|} \int_{E_h} (D^\alpha f)^2\left(\frac{x}{h}\right) dx \\ &= h^{d-2|\alpha|} \int_E (D^\alpha f)^2(x) dx \end{aligned}$$

oder

$$(7.4) \quad |f_h|_{H^t(E_h)} = h^{d/2-t} |f|_{H^t(E)} .$$

Weiter ist

$$(7.5) \quad P_h f_h = (P f)_h .$$

Denn beides sind Funktionen aus  $\mathcal{P}_h$ , und wir haben nur noch nachzurechnen, daß alle Freiheitsgrade  $\varphi_h \in \Phi_h$  für die beiden Funktionen übereinstimmen.  $\varphi_h$  ist durch  $\varphi_h(f_h) = \varphi(f)$ ,  $\varphi \in \Phi$ , gekennzeichnet. Also ist

$$\varphi_h(P_h f_h) = \varphi_h(f_h) = \varphi(f) = \varphi(Pf) = \varphi_h((Pf)_h)$$

und dies beweist (7.5).

Jetzt hat man mit (7.5), (7.4), Satz 7.2 und nochmals (7.5)

$$\begin{aligned} |f_h - P_h f_h|_{H^t(E_h)} &= |(f - Pf)_h|_{H^t(E_h)} \\ &= h^{d/2-t} |f - Pf|_{H^t(E)} \\ &\leq Ch^{d/2-t} |f|_{H^r(E)} \\ &= Ch^{d/2-t} h^{-d/2+r} |f_h|_{H^r(E_h)} \end{aligned}$$

■

## § 8 ZUSAMMENSETZEN FINITER ELEMENTE

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  ein Lipschitz-Gebiet. Seien  $(E_i, \mathcal{P}_i, \Phi_i)$ ,  $i=1, \dots, n$ , Finite Elemente mit

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^n \bar{E}_i, \quad E_i \cap E_k = \emptyset \quad \text{für } i \neq k.$$

Alle Freiheitsgrade seien von der Form  $\sum_{\alpha} c_{\alpha} D^{\alpha} p(a)$ .

DEFINITION 8.1:

- (a) Die Familie  $(E_i, \mathcal{P}_i, \Phi_i)_{i=1, \dots, n}$  heißt verträglich, wenn gilt:  
Gehört der Knoten  $a$  sowohl zu  $E_i$  als auch zu  $E_k$  und ist  $\Phi_{ai} = \{\varphi \in \Phi_i : \varphi \text{ hat Knoten } a\}$ , so ist  $\langle \Phi_{ai} \rangle = \langle \Phi_{ak} \rangle$ .
- (b) Ist eine Familie verträglich, so kann man also zu jedem Knoten  $a$  dieser Familie Freiheitsgrade  $\varphi_1, \dots, \varphi_t$  finden mit  $\langle \varphi_1, \dots, \varphi_t \rangle = \langle \Phi_{ai} \rangle$  für jedes Element, das den Knoten  $a$  hat. Dies sind die globalen Freiheitsgrade.
- (c) Zu jeder Wahl der globalen Freiheitsgrade gibt es genau ein  $p = (p_i) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}_i$ , so daß  $\varphi(p_i)$  für jeden globalen Freiheitsgrad  $\varphi$  mit Knoten in  $E_i$  den vorgeschriebenen Wert hat. Man nennt  $p$  eine Finite-Elemente-Funktion (obwohl  $p$  i. allg. nicht als Funktion auf  $\bar{\Omega}$  interpretierbar ist). Den linearen Raum dieser Funktionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{F}$ .
- (d) Ist  $\mathcal{F} \subseteq C^S(\bar{\Omega})$ , so heißt die Familie von der Klasse  $C^S$ .
- (e) Seien alle Freiheitsgrade der Familie stetig auf  $H^S(\Omega)$ . Dann gibt es eine lineare Abbildung  $P : H^S(\Omega) \rightarrow \mathcal{F}$  mit

$$\varphi(Pf - f) = 0 \quad , \quad \forall \varphi \in \Phi_i \quad , \quad i=1, \dots, n \quad .$$

$P$  heißt der Interpolationsoperator der Familie.

BEISPIELE:

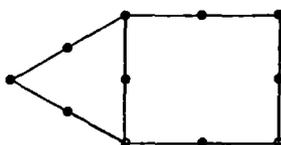
1) Die  $\bar{E}_i$  bilden eine Triangulierung von  $\bar{\Omega}$  (d.h. ist  $a$  Ecke von  $\bar{E}_i$  und  $a \in \bar{E}_k$ , so ist  $a$  auch Ecke von  $\bar{E}_k$ ). Dann bilden die Lagrangeschen linearen, quadratischen und kubischen Elementfamilien der Klasse  $C^0$ . Globale Freiheitsgrade sind  $p(a)$  für alle Knoten der Triangulierung.

2) Auch die Hermite'sch kubischen Elemente über einer Triangulierung bilden eine verträgliche Familie der Klasse  $C^0$  (aber nicht  $C^1$ !). Die globalen Freiheitsgrade sind  $D^\alpha p(a)$ ,  $|\alpha| \leq 1$  für die Knoten  $a$  und  $p(a)$  für die Schwerpunkte  $b$ .

3) HCT über einer Triangulierung bilden eine verträgliche Familie der Klasse  $C^1$ ! Globale Freiheitsgrade sind  $D^\alpha p(a)$ ,  $|\alpha| \leq 1$  für Knoten  $a$  und die Normalableitungen im Mittelpunkt von  $\bar{E}_i \cap \bar{E}_k$  (wobei jetzt eine gemeinsame Normalenrichtung festgelegt werden muß).

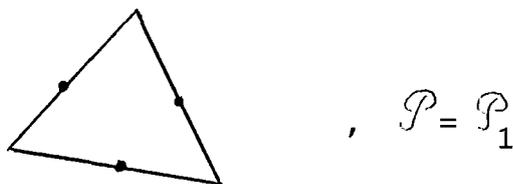
4) Auch das Argyris-Dreieck über einer Triangulierung bildet eine verträgliche Familie der Klasse  $C^1$  (aber nicht  $C^2$ !).

5) Auch Kombinationen von verschiedenen Elementtypen können verträgliche Familien bilden, z.B. dreieckig-Lagrange-quadratisch mit dem quadratischen Serendipity-Element:



Die Klasse ist  $C^0$ .

## 6) Das Crouzeix - Raviart - Dreieck



führt zu einer verträglichen Familie, welche nicht von der Klasse  $C^0$  ist.

SATZ 8.1: Sei  $(E_i, \mathcal{P}_i, \Phi_i)_{i=1, \dots, n}$  eine verträgliche Familie finiter Elemente der Klasse  $C^{s-1}$ , und sei  $\mathcal{P}_i \subseteq H^s(E_i)$ ,  $i=1, \dots, n$ . Dann ist jede Finite-Elemente-Funktion in  $H^s(\Omega)$ .

BEWEIS: Wir zeigen den Satz für  $s = 1$ . Sei also  $f$  eine Finite-Elemente-Funktion und  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Dann ist

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} f \, dx = \sum_i \int_{E_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} f \, dx = \sum_i \left\{ - \int_{E_i} \varphi \frac{\partial f}{\partial x_1} \, dx + \int_{\partial E_i} \varphi f \, \nu_{i1} \, d\sigma \right\}.$$

Für die Teile von  $\partial E_i$ , welche auf  $\partial \Omega$  liegen, ist  $\varphi = 0$ . Für die anderen Teile gibt es von  $\partial E_k, \partial E_\ell, \dots$  mit  $\nu_{k1}, \nu_{\ell 1}, \dots, = -\nu_{i1}$ . Da  $f$  entlang der Elementränder stetig ist, heben sich die Randintegrale also weg. Also hat  $f$  die verallgemeinerte Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \in L_2(\Omega).$$

DEFINITION 8.2: Eine Familie  $(E_i, \mathcal{P}_i, \Phi_i)_{i=1, \dots, n}$  heißt affin, wenn jedes Element der Familie affines Bild eines einzigen Elementes ist.

DEFINITION 8.3: Eine Familie von Familien  $(E_{ih}, \mathcal{P}_{ih}, \Phi_{ih})_{i=1, \dots, n(h)}$  heißt gleichförmig, wenn es von  $h$  unabhängige Konstanten  $c_1, c_2$

gibt, so daß jedes  $E_{ih}$  eine Kugel vom Radius  $c_1 h$  enthält und in einer Kugel vom Radius  $c_2 h$  enthalten ist.

SATZ 8.2: Sei  $(E_{ih}, \mathcal{P}_{ih}, \Phi_{ih})_{i=1, \dots, n(h)}$  eine gleichförmige Familie verträglicher und affiner Familien Finiter Elemente der Klasse  $C^{s-1}$ . Die Funktionale in  $\Phi_{ih}$  seien stetig auf  $H^r(\Omega)$ , so daß also der Interpolationsoperator  $P_h$  auf  $H^r(\Omega)$  erklärt ist. Sei  $\mathcal{P}_{r-1} \subseteq \mathcal{P}_{ih} \subseteq H^s(E_{ih})$ . Dann gibt es eine von  $h$  unabhängige Konstante  $C$ , so daß

$$\forall f \in H^r(\Omega) \quad \|f - P_h f\|_{H^s(\Omega)} \leq C h^{r-s} |f|_{H^r(\Omega)} .$$

BEWEIS: Wegen  $\mathcal{P}_{ih} \subseteq H^s(E_{ih})$  und weil die Familie von der Klasse  $C^{s-1}$  ist, ist nach Satz 8.1  $P_h f \in H^s(\Omega)$ . Daß die Abschätzung des Satzes besteht, folgt unmittelbar aus Satz 7.3.

## § 9 DIE KONFORME METHODE DER FINITEN ELEMENTE

Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet. Für  $h > 0$  sei die verträgliche Familie  $(E_{ih}, \mathcal{P}_{ih}, \Phi_{ih})_{i=1, \dots, n(h)}$  finiter Elemente gegeben. Der zugehörige Raum von Finite-Element-Funktionen sei  $\mathcal{F}_h$ .

Sei  $V$  ein abgeschlossener Unterraum von  $H^S(\Omega)$ . Auf  $V$  sei eine stetige  $V$ -elliptische Bilinearform  $a$  und ein stetiges lineares Funktional  $F$  gegeben. Wir betrachten die Variationsgleichung

$$u \in V, \quad a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V.$$

Ist  $\mathcal{F}_h \subseteq H^S(\Omega)$ , so ist  $V_h = V \cap \mathcal{F}_h$  ein endlich-dimensionaler Unterraum von  $V$ , und wir können das Galerkin-Verfahren

$$u_h \in V_h, \quad a(u_h, v) = F(v), \quad \forall v \in V_h$$

durchführen. Dieses heißt (wegen  $\mathcal{F}_h \subseteq H^S(\Omega)$ ) "konforme Methode der Finiten Elemente".

**SATZ 9.1:** Die Familien  $(E_{ih}, \mathcal{P}_{ih}, \Phi_{ih})_{i=1, \dots, n(h)}$  seien von der Klasse  $C^{S-1}$ , und  $\mathcal{P}_{ih} \subseteq H^S(E_{ih})$ . Dann ist  $\mathcal{F}_h \subseteq H^S(\Omega)$ . Ist weiter  $\mathcal{P}_{r-1} \subseteq \mathcal{P}_{ih}$ ,  $P_h V \subseteq V$ , sind alle Freiheitsgrade auf  $H^r(\Omega)$  stetig, und sind die Familien  $(E_{ih}, \mathcal{P}_{ih}, \Phi_{ih})_{i=1, \dots, n(h)}$  affin und die Familie dieser Familien gleichförmig, so gibt es eine von  $h$  unabhängige Konstante  $C$ , so daß für  $u \in H^r(\Omega)$

$$\|u - u_h\|_{H^S(\Omega)} \leq C h^{r-S} \|u\|_{H^r(\Omega)}.$$

BEWEIS: Es ist nach Satz 5.1

$$\|u - u_h\|_{H^s(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_{H^s(\Omega)} .$$

Sei  $v_h = P_h u$ . Wegen  $u \in H^r(\Omega)$  ist dies wohldefiniert. Wegen  $P_h V \subseteq V$  ist  $v_h \in V$  und damit  $v_h \in V_h = V \cap \mathcal{F}_h$ .

Also folgt

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^s(\Omega)} &\leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|_{H^s(\Omega)} \\ &\leq \frac{M}{\alpha} h^{r-s} C |u|_{H^r(\Omega)} \end{aligned}$$

nach Satz 8.2. ■

BEISPIELE:

1)  $-\Delta u = f$  in  $\Omega$ ,  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$ . In diesem Fall haben wir  $s = 1$ . Die Voraussetzungen des Satzes verlangen hier

(a) Die Finiten Elemente müssen von der Klasse  $C^0$  sein. Dies bedeutet, daß die Ableitungen der Funktionen in  $\mathcal{F}_h$  entlang Elementrändern endliche Sprünge machen. Die Ingenieure (vgl. Zienkiewicz S. 28) sagen: Spannungen zwischen den Elementen müssen endlich sein.

(b)  $r \geq 2$ , wenn der Fehler  $\|u - u_h\|$  mit  $h \rightarrow 0$  gegen Null gehen soll. Also umfaßt  $\mathcal{P}_{ih}$  mindestens die linearen Funktionen. Die Ingenieure sagen: Konstante Spannungsverteilungen innerhalb eines Elementes müssen exakt dargestellt werden können durch die Funktionen in diesem Element.

(c)  $P_h f = 0$  auf  $\partial\Omega$  falls  $f \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . Dies ist z.B. erfüllt,

falls  $\bar{\Omega}$  ein Polygon und die Finiten Elemente irgendwelche der in §6 angegebenen Typen sind, mit Ausnahme des Crouzeix-Raviart-Dreiecks.

2)  $\Delta^2 u = f$  in  $\Omega$ ,  $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  auf  $\partial\Omega$ . Hier ist  $s = 2$ . Die Voraussetzungen des Satzes verlangen, daß die Finiten Elemente von der Klasse  $C^1$  sind, und für Konvergenz müssen die  $\mathcal{P}_{ih}$  mindestens die Polynome vom Grade 2 enthalten. Dies trifft zu für das Argyris-Dreieck und für HCT.  $P_h V \subseteq V$  ist wieder erfüllt für Polygone. Man bekommt also

$$\|u - u_h\|_{H^s(\Omega)} \leq C h^{r-2} \|u\|_{H^r(\Omega)},$$

wobei  $r = 6$  für das Argyris-Dreieck und  $r = 4$  für HCT.

Bisher haben wir nur Konvergenz im Sinne der Norm in  $H^s(\Omega)$  untersucht. Natürlich hat man dann auch Konvergenz - mit der gleichen Potenz  $r - s$  von  $h$  - für alle Normen  $H^t(\Omega)$  für  $t \leq s$ . Da aber unter den Voraussetzungen von Satz 9.1

$$\min_{v \in V_h} \|u - v\|_{H^t(\Omega)} \leq C h^{r-t} \|u\|_{H^r(\Omega)}$$

gilt, erwartet man die - bessere - Konvergenzordnung  $r - t$ . Dies werden wir für die Dirichlet-Aufgabe für Differentialgleichungen zweiter Ordnung unter gewissen Zusatzvoraussetzungen beweisen.

Sei also

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + c u v \right) dx$$

mit  $c, a_{ij} \in C(\bar{\Omega})$ ,  $c \geq 0$ ,  $(a_{ij})$  positiv definit in  $\bar{\Omega}$ . Nach § 4 ist  $a$   $V = H_0^1(\Omega)$ -elliptisch. Mit  $f \in L_2(\Omega)$  betrachten wir die Variationsgleichung

$$(9.1) \quad u \in V \quad , \quad a(u, v) = (f, v)_{L_2(\Omega)} \quad , \quad \forall v \in V \quad .$$

DEFINITION 9.1: Die Aufgabe (9.1) heißt regulär, wenn es eine Konstante  $C$  gibt mit

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)} \quad .$$

Ist die Aufgabe regulär, so ist  $u$  nach § 4 Lösung von

$$Au = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad ,$$

$$Au = - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) u + cu \quad .$$

SATZ 9.2 (Nitsche-Trick): Die Aufgabe 9.1 sei regulär. Die Familien  $(E_{ih}, \mathcal{P}_{ih}, \phi_{ih})_{i=1, \dots, n(h)}$  seien von der Klasse  $C^0$ , und  $\mathcal{P}_{ih} \subseteq H^1(E_{ih})$ . Dann ist  $\mathcal{F}_h \in H^s(\Omega)$ . Ist weiter  $\mathcal{P}_{r-1} \subseteq \mathcal{P}_{ih}$  mit einem  $r \geq 2$ ,  $\mathcal{P}_h V \subseteq V$ , sind alle Freiheitsgrade auf  $H^2(\Omega)$  stetig, sind die Familien affin und ist die Familie dieser Familien gleichförmig, so gibt es eine von  $h$  unabhängige Konstante  $C$ , so daß für  $u \in H^r(\Omega)$

$$\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} \leq C h^r \|u\|_{H^r(\Omega)} \quad .$$

BEWEIS: Es ist

$$\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} = \text{Max} \left\{ (u - u_h, g)_{L_2(\Omega)} : \|g\|_{L_2(\Omega)} = 1 \right\} \quad .$$

Für jedes  $g \in L_2(\Omega)$  gibt es wegen der Regularität ein  $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  mit

$$Av = g \quad , \quad \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|Av\|_{L_2(\Omega)} \quad .$$

Also haben wir

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} &= \text{Max} \{ (u - u_h, Av)_{L_2(\Omega)} : \|Av\|_{L_2(\Omega)} = 1 \} \\ &= \text{Max} \{ a(u - u_h, v) : \|Av\|_{L_2(\Omega)} = 1 \} \\ &\leq \text{Max} \{ a(u - u_h, v) : \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C \} . \end{aligned}$$

Nun gilt für alle  $v_h \in V_h$

$$a(u - u_h, v_h) = 0 .$$

Für  $v_h = P_h v$  haben wir also

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v) &= a(u - u_h, v - P_h v) \\ &\leq M \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \|v - P_h v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C_1 M h^{r-1} \|u\|_{H^r(\Omega)} h \|v\|_{H^2(\Omega)} . \end{aligned}$$

Also bekommen wir

$$\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} \leq C C_1 M h^r \|u\|_{H^r(\Omega)} .$$

Regularität ist eine Forderung an das Gebiet  $\Omega$  und an die Koeffizienten  $a_{ij}, c$ , siehe Hackbusch, Kap. 9.

## T E I L III :

## IMPLEMENTIERUNG

## § 10 GRUNDBEGRIFFE

Wir beginnen mit einem ganz einfachen Modellproblem:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

Dabei sei  $\Omega$  ein Polygon. Als Finite Elemente nehmen wir Lagrange-sche Elemente über einer Triangulierung von  $\Omega$ , welche alle vom gleichen Grad sind.

Die Finite-Elemente-Näherung  $u$  berechnet sich dann aus

$$u_h \in \mathcal{F}_h, \quad \int_{\Omega} \nabla u_h^T \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx, \quad \forall v_h \in \mathcal{F}_h.$$

Dabei verschwinden  $u, v$  noch auf  $\partial\Omega$ .

Sind  $N_j^E$  die Formfunktionen von  $E$ , so ist in  $E$

$$u_h = \sum_{j=1}^m u_j^E N_j, \quad v_h = \sum_{j=1}^m v_j^E N_j,$$

wobei  $u_j^E, v_j^E$  die Werte von  $u_h, v_h$  in den Knoten von  $E$  sind.

Also

$$\int_E \nabla u_h^T \nabla v_h \, dx = v_h^{ET} A^E u_h^E,$$

$$u^E = \begin{pmatrix} u_1^E \\ \vdots \\ u_m^E \end{pmatrix}, \quad v^E = \begin{pmatrix} v_1^E \\ \vdots \\ v_m^E \end{pmatrix}, \quad A^E = \begin{pmatrix} \int_E \nabla N_j^{ET} \nabla N_k^E \, dx \end{pmatrix}_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, m}}.$$

Ebenso gilt

$$\int_E f v_h \, dx = v_h^{ET} F^E, \quad F_E = \left( \int_E f N_k \, dx \right)_{k=1, \dots, m}.$$

$A^E$  heißt Element-Matrix,  $F^E$  Element-Vektor.  $u^E, v^E$  enthalten die Werte von  $u_h, v_h$  an den Knoten von  $E$ .

Offenbar gilt

$$\int_{\Omega} \nabla u_h^T \nabla v_h \, dx = \sum_E v^{ET} A^E u^E, \quad \int_{\Omega} f v_h \, dx = \sum_E v^{ET} F^E.$$

Die Triangulierung besitze  $M$  Knoten. Wir ordnen alle diese Knoten in einer Liste an, welche jeden Knoten genau einmal enthält. Dann kann man die Werte von  $u_h, v_h$  an diesen Knoten zu Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_M \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_M \end{pmatrix}$$

zusammenfassen. Für jedes Element  $E$  gibt es Indizes  $e_i^E$ , so daß der  $i$ -te Knoten von  $E$  der  $e_i^E$ -te Knoten in der Liste ist, d.h. es ist

$$u_{e_i^E} = u_i^E$$

und ebenso für  $v$ . Mit den  $M \times M$ -Matrizen bzw.  $M$ -Vektoren

$$\bar{A}_{e_i^E e_k^E}^E = A_{ik}^E, \quad \bar{F}_{e_i^E}^E = F_i^E, \quad i, k = 1, \dots, m$$

(alle anderen Elemente von  $\bar{A}^E, \bar{F}^E$  sind Null) gilt dann

$$v^{ET} A^E u^E = v^T \bar{A}^E u \quad , \quad v^T \bar{F}^E = v^{ET} F^E \quad ,$$

also

$$\int_{\Omega} \nabla u_h^T \nabla v_h dx = v^T Au \quad , \quad \int_{\Omega} f v_h dx = v^T F \quad ,$$

$$A = \sum_E \bar{A}^E \quad , \quad F = \sum_E \bar{F}^E \quad .$$

$A, F$  heißen Systemmatrix und Systemvektor. Die Variationsgleichung schreibt sich jetzt

$$u \in \mathbb{R}^M \quad , \quad v^T Au = v^T F \quad , \quad \forall v \in \mathbb{R}^M \quad .$$

Hier muß man noch die Randbedingungen beachten: Liegt der Knoten  $k$  auf  $\partial\Omega$ , so ist  $u_k = v_k = 0$ . Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

1) Für Randknoten  $k$  streicht man aus  $u, v, F$  die  $k$ -te Komponente und aus  $A$  sowohl  $k$ -te Zeile als auch  $k$ -te Spalte. Die reduzierten Größen seien  $u', v', F', A'$ . Dann gilt

$$u' \in \mathbb{R}^{M-R} \quad , \quad v'^T A' u' = v'^T F' \quad , \quad \forall v' \in \mathbb{R}^{M-R} \quad ,$$

wo  $R$  die Anzahl der Randknoten ist. Da  $v'$  nun ein beliebiger Vektor in  $\mathbb{R}^{M-R}$  ist, der keinen weiteren Einschränkungen mehr unterliegt, folgt

$$A' u' = F' \quad .$$

Auflösen dieses Systems liefert die Werte von  $u_h$  an den Knoten. Die Matrix  $A'$  ist positiv definit, denn es ist ja

$$v'^T A' v' = a(v_h, v_h) = |v_h|_{H^1(\Omega)}^2$$

und dies ist positiv für  $v' \neq 0$ .

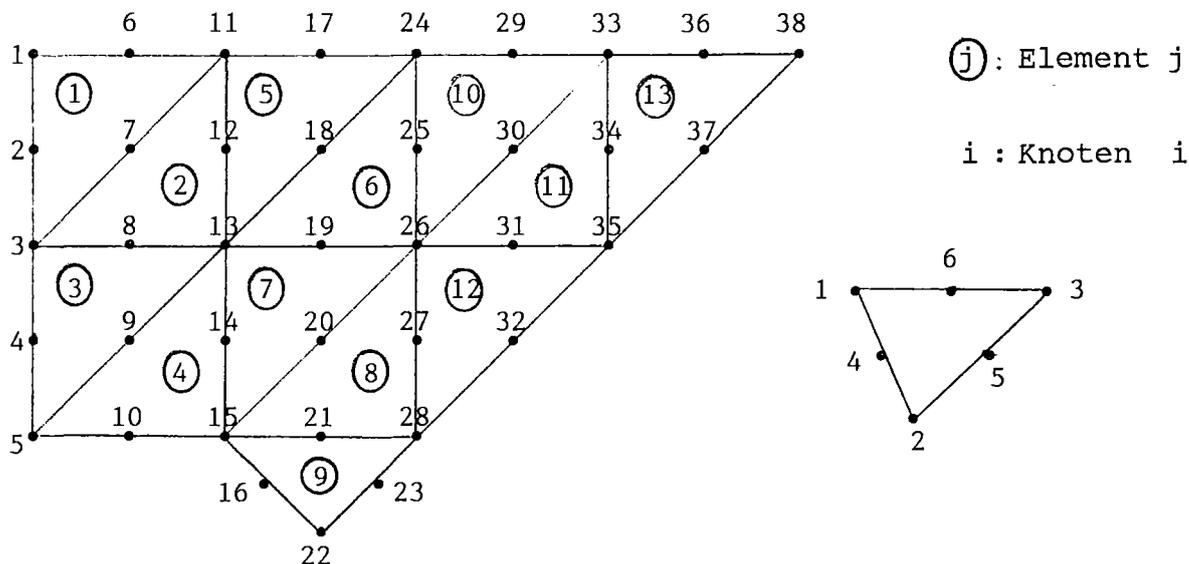
2) Einfacher ist es, für jeden Randknoten  $k$  die  $k$ -te Zeile und Spalte von  $A$  den  $k$ -ten Einheitsvektor zu ersetzen und in  $F$  die  $k$ -te Komponente  $0$  zu setzen.

Zur Durchführung der Methode der Finiten Elemente muß man also zweierlei tun:

a) Bereitstellung einer Familie Finiter Elemente. Im Fall Lagrange-scher Elemente über einer Triangulierung kann diese etwa so aussehen:

Knotenliste			Elementliste	
Knoten-Nr.	Knoten-Koo'	Rand?	Element-Nr.	Element-Knoten
1	$a_1$	ja/nein	1	$e_1^1, \dots, e_m^1$
:	:		:	:
:	:		:	:
M	$a_M$	ja/nein	n	$e_1^n, \dots, e_m^n$

BEISPIEL: Quadratische Elemente, vgl. Schwarz S. 140.



Knotenliste				Elementliste						
1	0	2	ja	1	1	3	11	2	7	6
2	0	1.5	ja	2	3	13	11	8	12	7
	⋮			3	3	5	13	4	9	8
11	1	2	ja							
12	1	1.5	nein				⋮			
13	1	1	nein							
	⋮									
38	4	2	ja	13	35	38	33	37	36	34

b) Bereitstellen von Unterprogrammen

elmat ( $A^E, E$ )                      elvec ( $F^E, E$ )                      ,

welche für jedes Element  $E$  die Elementmatrix bzw. den Elementvektor berechnen.

Den Rest erledigt die Maschine:

```

/* Einlesen von Knotenliste und Elementliste */
do i = 1 to M;
get (K(i,1),K(i,2),K(i,3)); /* K(i,1),K(i,2) Koo' von Knoten i,
                           K(i,3) = ja/nein */
end;
do j = 1 to n;
get (E(j,1),...,E(j,m)); /* Knoten  $\ell$  des j-ten Elements hat
                           die Nummer E(j, $\ell$ ) in der
                           Knotenliste */
end;

```

```
/* Assemblierung */  
A = 0; F = 0;  
do j = 1 to n;  
  call elmat (AE,E(j,*));  
  call elvec (FE,E(j,*));  
  do k = 1 to m;  
    F(E(j,k)) = F(E(j,k)) + FE(k);  
    do l = 1 to m;  
      A(E(j,k),E(j,l)) = A(E(j,k),E(j,l)) + AE(k,l);  
    end;  
  end;  
end;  
  
/* Einarbeiten der Randbedingungen */  
do i = 1 to M;  
  if K(i,3) = ja then do;  
    A(i,*),A(*,i) = 0; F(i) = 0; A(i,i) = 1;  
  end;  
end;  
  
/* Lösungsphase */  
call solve (A,u,F);
```

## § 11 BERECHNUNG DER ELEMENTMATRIZEN UND ELEMENTVEKTOREN

Wir berechnen nun Elementmatrizen und Elementvektoren für die Variationsgleichung

$$a(u,v) = (f,v)_{L_2(\Omega)} ,$$

$$a(u,v) = \int_{\Omega} (\nabla u^T D \nabla v + c u v) dx , \quad D \text{ symmetrisch.}$$

In einem Element  $E$  ist

$$u_h = N^T u^E , \quad N = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_m \end{pmatrix} , \quad u = \begin{pmatrix} u_1^E \\ \vdots \\ u_m^E \end{pmatrix} .$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \nabla u_h &= N'^T u^E , \quad N' = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial N_1}{\partial x_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial N_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial N_m}{\partial x_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\nabla N_1)^T \\ \vdots \\ (\nabla N_m)^T \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial N}{\partial x_d} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Also ist

$$\int_E \nabla u_h^T D \nabla v_h dx + \int_E c u_h v_h dx = u^{ET} \int_E N' D N'^T dx v^E + u^{ET} \int_E c N N^T dx v^E ,$$

d.h.

$$(11.1) \quad A^E = \int_E N' D N'^T dx + \int_E c N N^T dx \quad .$$

Die erste Matrix heißt in der Elastizitätstheorie Steifigkeitsmatrix, die zweite Massenmatrix. Für den Elementvektor (er heißt in der Elastizitätstheorie Lastvektor) gilt entsprechend

$$(11.2) \quad F^E = \int_E f N dx \quad .$$

Sei nun  $E$  das Bild eines Referenzelements  $\hat{E}$  unter  $F$  und  $G$  die Umkehrabbildung, so daß also  $x = F(\hat{x})$  und  $\hat{x} = G(x)$  äquivalent sind. Die Formfunktionen auf  $\hat{E}$  und  $E$  hängen zusammen gemäß

$$N(x) = \hat{N}(\hat{x}) \quad \text{falls} \quad x = F(\hat{x}) \quad .$$

Also gilt

$$\frac{\partial N(x)}{\partial x_i} = \sum_{v=1}^d \frac{\partial N(x)}{\partial \hat{x}_v} \frac{\partial \hat{x}_v}{\partial x_i} = \sum_{v=1}^d \frac{\partial \hat{N}(\hat{x})}{\partial \hat{x}_v} \frac{\partial G_v(x)}{\partial x_i}$$

oder

$$N'(x) = \hat{N}'(\hat{x}) G'^T(x) = \hat{N}'(\hat{x}) (F')^{-T}(\hat{x}) \quad .$$

Damit erhält man

$$A^E = \int_{\hat{E}} \hat{N}' \hat{K} \hat{N}'^T d\hat{x} + \int_{\hat{E}} c(F(\hat{x})) \hat{N} \hat{N}^T |F'(\hat{x})| d\hat{x} \quad ,$$

$$K(\hat{x}) = (F'(\hat{x}))^{-T} D(F(\hat{x})) (F'(\hat{x}))^{-1} |F'(\hat{x})| \quad ,$$

$$F^E = \int_{\hat{E}} f(F(\hat{x})) \hat{N} |F'(\hat{x})| d\hat{x} \quad .$$

Wir betrachten zwei Spezialfälle:

1)  $\hat{F}\hat{x} = B\hat{x} + b. \quad F' = B.$

Ist z.B.  $\hat{E}$  das Einheitsdreieck und hat  $E$  die Ecken  $a_1, a_2, a_3$ , so kann man  $b = a_1, B = (a_3 - a_1, a_2 - a_1)$  nehmen.

2)  $F$  isoparametrische Transformation, also

$$F(\hat{x}) = \sum_{k=1}^m \hat{N}_k(\hat{x}) a_k = B \hat{N}, \quad B = (a_1, \dots, a_n)$$

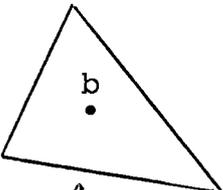
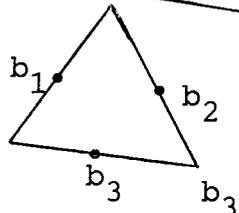
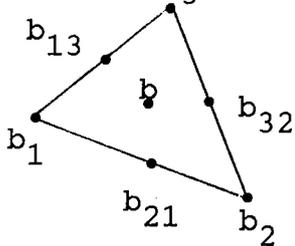
Dann ist

$$F' = B \hat{N}'$$

Zur Berechnung von  $A^E, F^E$  braucht man noch Quadraturformeln. Diese haben Knoten  $\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_q \in E$  und Gewichte  $w_1, \dots, w_q$ :

$$\int_E f(\hat{x}) d\hat{x} \sim \sum_{r=1}^q b_r f(\hat{b}_r)$$

Für Dreiecke hat man z.B. folgende Formeln

Knoten	Formel	Exakt für
	$ E f(b)$	$\mathcal{P}_1$
	$\frac{ E }{3} \sum_i f(b_i)$	$\mathcal{P}_2$
	$\frac{ E }{60} (27 f(b) + 8 \sum_{i,j} f(b_{ij}) + 3 \sum_i f(b_i))$	$\mathcal{P}_3$

Für Quadrate kann man etwa die Gaußschen Formeln in einer Variablen verwenden.

Damit kann man folgendes Programm schreiben:

```

elmat: proc (AE,B);
AE = 0;
do r = 1 to q;
call shape ( $\hat{N}, \hat{N}', \hat{b}_r$ );
 $b_r = B \hat{N}$ ;
call coeff (D,c, $b_r$ );
 $F' = B \hat{N}'$ ;
 $K = F'^{-T} D (F')^{-1} |\det(F')|$ ;
 $A^E = A^E + w_r (\hat{N}' K \hat{N}'^T + c \hat{N} \hat{N}^T)$ 
end;
end elmat;

```

Für die Elementvektoren kann man ein ähnliches aber einfacheres Programm aufstellen:

```

elvec: proc (FE,B);
FE = 0;
do r = 1 to q;
call shape ( $\hat{N}, \hat{N}', \hat{b}_r$ );
 $b_r = B \hat{N}$ ;
call coeff (f, $b_r$ );
 $F^E = F^E + w_r \hat{N} |\det(F')|$ ;
end;
end elvec;

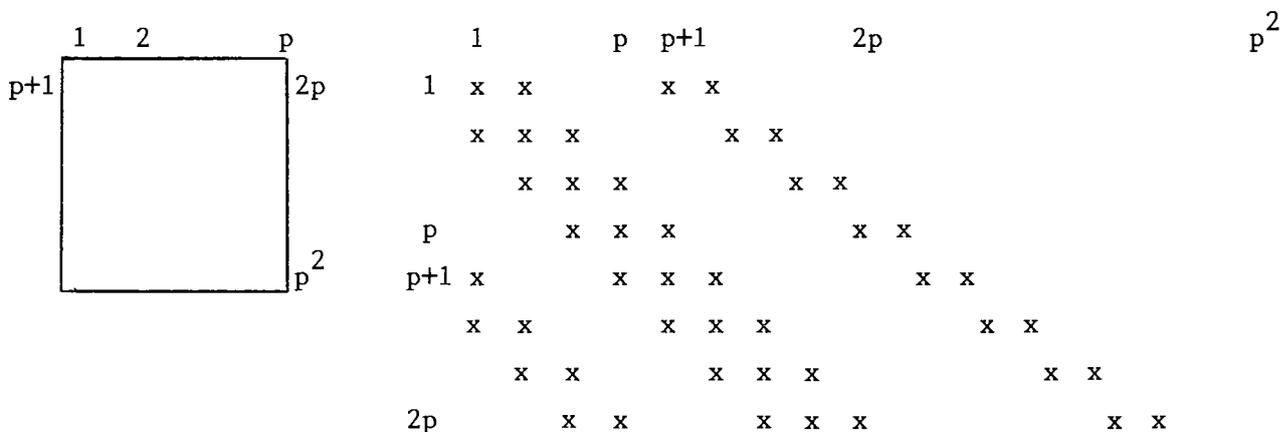
```

Da die Unterprogramme viele Operationen gemeinsam haben, wird man praktisch natürlich ein gemeinsames Programm schreiben.

§ 12 LÖSUNG DER DISKRETEN PROBLEME

Die Systemmatrix A ist dünn besetzt: Es ist  $a_{ik} \neq 0$  nur für Freiheitsgrade  $i, k$ , die zum gleichen Element gehören. Bei geeigneter Numerierung der Knoten hat A sogar Bandstruktur:

BEISPIELE: Bilineare Elemente in Quadraten

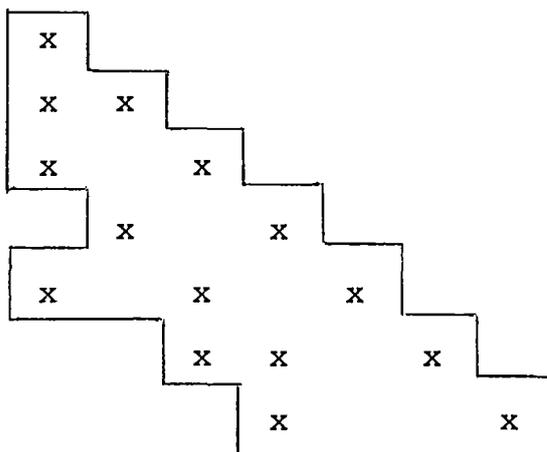


$$a_{ij} = 0, \quad |i-j| > p+1$$

Für das Eliminationsverfahren bei symmetrisch dünnbesetzter Matrix ist der Begriff der Enveloppe von A (Env(A)) von Bedeutung:

$$\text{Env}(A) = \{(i, j) : f_i \leq j \leq i\}, \quad f_i = \text{Min} \{j : a_{ij} \neq 0\}$$

BEISPIEL:



Während des Eliminationsprozesses treten nur innerhalb  $\text{Env}(A)$  neue von Null verschiedene Elemente auf (fill in). Die Elemente von  $A$  innerhalb  $\text{Env}(A)$  werden zweckmäßigerweise nach der Methode von Jennings abgespeichert:

$U(1: N)$ ,  $N = \text{Anzahl der Elemente in } \text{Env}(A)$ .

$Z(1: M)$ ,  $M = \text{Dimension von } A$

$$U : \begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{2f_2} & \cdots & a_{22} & a_{3f_3} & \cdots & a_{33} \\ \uparrow & & & \uparrow & & & \uparrow \\ z_1 & & & z_2 & & & z_3 \end{array}$$

$z_i$  gibt also die Position von  $a_{ii}$  innerhalb  $U$  an. Für  $j \leq i$  ist dann

$$a_{ij} = \begin{cases} U(z_i - (i-j)), & z_i - (i-j) > z_{i-1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Das Standard-Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen mit positiv definiten Matrix ist das Cholesky-Verfahren. Es berechnet die Cholesky-Zerlegung

$$A = LL^*$$

mit einer linken Dreiecksmatrix  $L$ . Es ist in allen Lehrbüchern der Numerik beschrieben.

Die Front-Lösungsmethode kombiniert das Assemblieren und das Eliminieren zum Zwecke der Speicherersparnis. Sie arbeitet nach folgenden Regeln:

1. Man assembliere so lange, bis ein Freiheitsgrad (etwa der erste) in keinem weiteren Element mehr auftritt. Zu diesem Zeitpunkt hat die - erst teilweise assemblierte - Systemmatrix die Gestalt

	1	...	h	...	M				
1	x	x	x	x	x	0	...	0	x
:	x	x	x	x	x				
:	x	x	x	x	x			x	
:	x	x	x	x	x			x	
h	x	x	x	x	x				x
:	0								
:	:		x		x			x	
:	:							x	
M	0								x

Die erste Zeile und Spalte ist bereits endgültig.

2. Man eliminiere die Elemente der ersten Spalte:

```

do i = 2 to h;
   $l_{i1} = a_{i1}/a_{11};$ 
   $b_i = b_i - l_{i1} * b_1;$ 
  do j = 2 to h;
     $a_{ij} = a_{ij} - l_{i1} * a_{1j}$ 
  end;
end;
end;
```

Die Zeilen 2, ..., h sind zwar noch nicht endgültig. Die von ihnen subtrahierten Vielfachen der ersten Zeile sind es aber, so daß dieser Schritt die gleiche Wirkung hat wie der erste Eliminationsschritt in der voll assemblierten Matrix.

3. Man schreibe die erste Zeile auf einen Hintergrundspeicher.
4. Man assembliere nun weiter, bis ein weiterer Freiheitsgrad (etwa der zweite) in keinem weiteren Element mehr auftritt, und verfare entsprechend. Dies macht man während des gesamten Assemblierungsprozesses.
5. Ist für einen Freiheitsgrad  $u_i$  ein Wert  $g_i$  vorgeschrieben (z.B. bei einer Dirichlet-Randbedingung), so wird er, sobald er in weiteren Elementen nicht mehr vorkommt, folgendermaßen eliminiert:

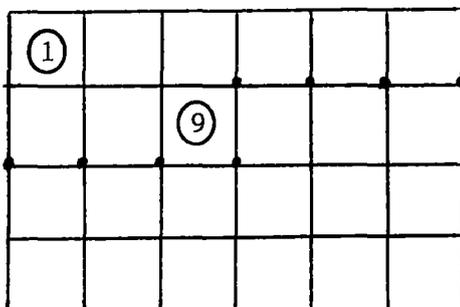
(i)  $F_\ell = F_\ell - a_{\ell i} g_i, \ell > i$

(ii) Streiche Zeile  $i$

Das Rückwärtseinsetzen wird dann nur noch für die freien Variablen durchgeführt.

Die Freiheitsgrade (oder deren Knoten), welche schon aufgetreten sind, die aber noch nicht eliminiert wurden, heißen die Front.

BEISPIEL: Bilineare Elemente in Quadraten mit zeilenweiser Nummerierung der Elemente:



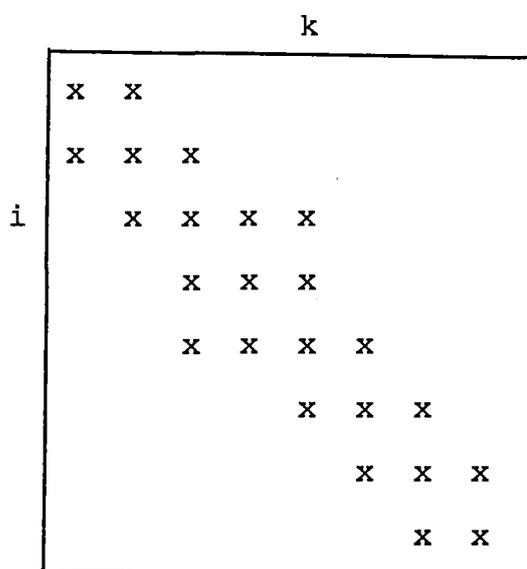
„ · ” Front nach Verarbeitung von Element 9.

Entscheidend für den Rechenzeit- und Speicherbedarf ist die Bandbreite  $h$  von  $A$ . Die beiden folgenden Algorithmen versuchen, die

Zeilen und Spalten einer Matrix so zu vertauschen, daß  $h$  möglichst klein wird.

1. Der Algorithmus von Rosen.

Sei  $h$  die Bandbreite der symmetrischen Matrix und  $a_{ik} \neq 0$  ein Element mit  $k = i+h$ :



Vertauschung von Zeilen  $i, j$  (und nachfolgende Vertauschung von Spalten  $i, j$ ) reduziert die Bandbreite sicher nicht, wenn  $j < i$  oder  $j > i + 2h$ . Ebenso reduziert die Vertauschung der Spalten  $k, l$  die Bandbreite sicher nicht, wenn  $l > k$  oder  $l < k - 2h$ . Gibt es mehrere Elemente  $a_{ik}$  mit  $a_{ik} \neq 0$  und  $k = i+h$ , so kann man die Bandbreite nicht in einem Schritt reduzieren. So kommt man zu folgendem plausiblen Verfahren:

1. Bestimme die Bandbreite  $h$  und ein Element  $a_{ik} \neq 0$  mit  $k = i+h$ .
2. Prüfe die Zeilen  $j$  mit  $i < j \leq i + 2h$ , ob Vertauschung  $h$  reduziert.

Prüfe die Spalten  $\ell$  mit  $k - 2h \leq \ell < k$ , ob Vertauschung  $h$  reduziert.

3. Falls ja, führe die Vertauschung aus. Falls nein, führe die Vertauschung ebenfalls durch, wenn
  - (a)  $h$  sich dadurch nicht vergrößert und
  - (b) diese Vertauschung noch nicht durchgeführt wurde.
4. Zurück zu 2.

2. Der Algorithmus von Cuthill - McKee.

Sei  $G(A)$  der Graph von  $A$ , d.h. die Knoten von  $G(A)$  sind die Zeilen (oder Spalten-) nummern  $1, \dots, M$  von  $A$ , und zwei Knoten  $i, k$  sind genau dann miteinander verbunden, wenn  $a_{ik} \neq 0$ . Der Grad eines Knotens ist die Anzahl seiner Nachbarn. Offenbar ist dann

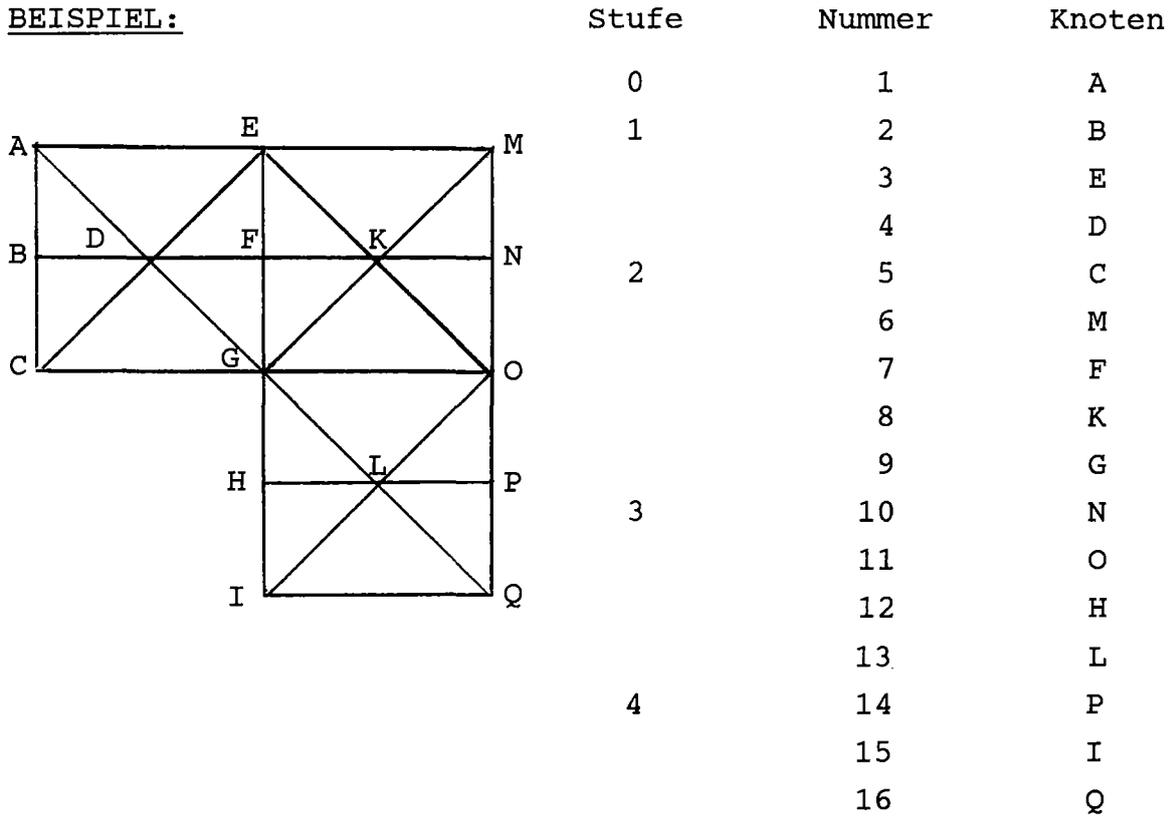
$$h = \text{Max} \{ |i-k| : i \text{ und } k \text{ sind Nachbarn} \} .$$

Zur Reduktion von  $h$  wird man also die Knoten so numerieren, daß für jeden Knoten die Nachbarn möglichst früh gezählt werden:

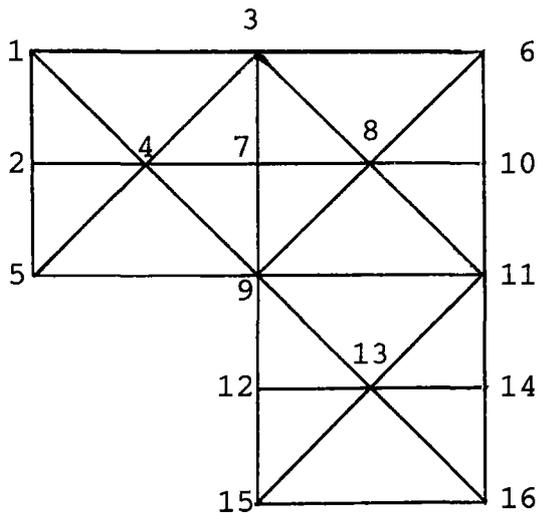
- Stufe 0: Wähle einen Knoten minimalen Grades und gebe ihm die Nr. 1.
- Stufe 1: Numeriere die Nachbarn des Knotens von Stufe 0 nach aufsteigendem Grad.
- Stufe 2: Numeriere die Nachbarn der Knoten von Stufe 1 (in der in Stufe 1 festgelegten Reihenfolge) nach aufsteigendem Grad.

·  
·  
·

BEISPIEL:



Die gefundene Numerierung führt zu einer Bandbreite  $h = 5$ :



In der ursprünglichen Numerierung (A,B,C,... ) war  $h = 7$ .

## § 13 DIE KONDITION DER SYSTEMMATRIX

Sei  $Au = F$  zu lösen. Sind  $A, F$  nur näherungsweise bekannt, so löst man statt dessen  $(A+\Delta A)\tilde{u} = F + \Delta F$ . Aus Prama I kennt man folgenden Satz: Sei

$$k(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

die Kondition von  $A$  bezüglich irgendeiner Norm, und sei

$$q = k(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1 .$$

Dann ist  $A + \Delta A$  invertierbar, und es gilt

$$\frac{\|\tilde{u}-u\|}{\|u\|} \leq \frac{k(A)}{1-q} \left\{ \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta F\|}{\|F\|} \right\} .$$

Diese Abschätzung ist sinnvoll nur für  $q \ll 1$ . Der folgende Satz gibt Auskunft über  $k(A)$  im Sinne der euklidischen Norm.

**SATZ 13.1:** Sei  $(E_{ih}, \mathcal{P}_{ih, \phi_{i,h}})_{i=1, \dots, n(h)}$ ,  $h > 0$ , eine verträgliche affine Familie finiter Elemente der Klasse  $C^{s-1}$  mit  $\mathcal{P}_{ih} \subseteq H^s(E_{ih})$ , und die Familie dieser Familien sei gleichförmig. Sei  $V$  ein Unterraum von  $H^s(\Omega)$ , und sei  $a$  eine symmetrische stetige  $V$ -elliptische Bilinearform. Sei  $A$  die zu  $a$  gehörige Systemmatrix. Dann gibt es eine Konstante  $C$ , so daß

$$k(A) \leq C h^{-2s} .$$

**BEWEIS:** Nach Aufgabe 36 gibt es eine Konstante  $C_1$ , so daß

$$(13.1) \quad \forall v_h \in \mathcal{F}_h \quad \|v_h\|_{H^s(\Omega)} \leq C_1 h^{-s} \|v_h\|_{H^0(\Omega)} .$$

Wir zeigen: Es gibt von  $h$  unabhängige Konstanten  $c_2, c_2' > 0$ , so daß

$$(13.2) \quad \forall v_h \in \mathcal{F}_h \quad c_2' h^{d/2} \|v\|_{\mathbb{R}^M} \leq \|v_h\|_{H^0(\Omega)} \leq c_2 h^{d/2} \|v\|_{\mathbb{R}^M},$$

wo  $v$  der Vektor der Freiheitsgrade von  $v_h$  ist. Zunächst ist

$$\|v_h\|_{H^0(\Omega)}^2 = \sum_E \int_E v_h^2 dx = \sum_E v^{ET} M^E v^E,$$

$$M^E = \left( \int_E N_k N_\ell dx \right)_{k, \ell = 1, \dots, m}.$$

Ist  $\hat{E}$  das Referenzdreieck und entsteht  $E$  aus  $\hat{E}$  durch die affine Abbildung  $x = hB\hat{x} + b$ , so ist

$$M^E = h^d |B| M^{\hat{E}}, \quad M^{\hat{E}} = \left( \int_{\hat{E}} \hat{N}_k \hat{N}_\ell dx \right)_{k, \ell = 1, \dots, m}.$$

Seien  $\hat{\lambda}, \hat{\Lambda}$  der kleinste bzw. größte Eigenwert von  $M^{\hat{E}}$ . Dann ist

$$\hat{\lambda} \|v^E\|_{\mathbb{R}^m}^2 \leq v^{ET} M^{\hat{E}} v^E \leq \hat{\Lambda} \|v^E\|_{\mathbb{R}^m}^2, \quad \text{also}$$

$$\hat{\lambda} h^d |B| \|v^E\|_{\mathbb{R}^m}^2 \leq v^{ET} M^E v^E \leq \hat{\Lambda} h^d |B| \|v^E\|_{\mathbb{R}^m}^2.$$

Außerdem gilt

$$\|v\|_{\mathbb{R}^M}^2 \leq \sum_E \|v^E\|_{\mathbb{R}^m}^2 \leq N \|v\|_{\mathbb{R}^M}^2,$$

wenn jeder Freiheitsgrad zu maximal  $N$  Elementen gehört. Da  $N, |B|, |B^{-1}|$  unter unseren Voraussetzungen durch eine von  $h$  unabhängige Konstante abgeschätzt werden können, folgt (13.2).

Sei nun  $V_h = V \cap \mathcal{F}_h$ . Für  $v_h \in V_h$  ist

$$(Av, v) = a(v_h, v_h) \leq M \|v_h\|_{H^s(\Omega)}^2 .$$

Nach (13.1) folgt

$$|(Av, v)| \leq C_1 M h^{-2s} \|v_h\|_{H^0(\Omega)}^2$$

und nach (13.2)

$$(13.3) \quad |(Av, v)| \leq C_1 C_2 M h^{d-2s} \|v\|_{\mathbb{R}^M}^2 .$$

Andererseits ist

$$(13.4) \quad \begin{aligned} (Av, v) = a(v_h, v_h) &\geq \alpha \|v_h\|_{H^s(\Omega)}^2 \geq \alpha \|v_h\|_{H^0(\Omega)}^2 \\ &\geq \alpha C_2' h^d \|v\|_{\mathbb{R}^M}^2 . \end{aligned}$$

Sei  $A'$  die aus  $A$  durch Einarbeiten der Randbedingungen entstandene Matrix.

Aus (13.3), (13.4) folgt für die Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $A'$

$$\alpha C_2' h^d \leq \lambda_i \leq C_1 C_2 M h^{d-2s} .$$

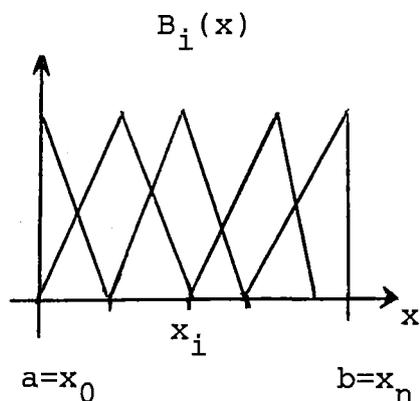
Damit hat man aber

$$k(A) = \frac{\text{Max } \lambda_i}{\text{Min } \lambda_i} \leq \frac{C_1 C_2 M}{\alpha C_2'} h^{-2s} ,$$

und dies ist die Behauptung.

Zur Verbesserung der Kondition kann man versuchen, gute Basen in  $\mathcal{F}_h$  zu finden. Wir betrachten zunächst den Fall  $d = 1$  und lineare Elemente der Klasse  $C^0$  auf einer äquidistanten Unterteilung in  $n$

Teilintervalle  $(x_i, x_{i+1})$ . Als Basis von  $\mathcal{F}_h$  bieten sich B-Splines an:



$$B_i(x) = \begin{cases} 1 - |x_i - x|/h, & |x - x_i| < h, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit kann man etwa die Aufgabe

$$-(pu')' + qu = f \quad , \quad a < x < b$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

lösen, welche der Variationsaufgabe

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad , \quad a(u, v) = (f, v)_{L_2(a, b)} \quad \forall v \in H_0^1(a, b)$$

mit

$$a(u, v) = \int_a^b (pu'v' + quv) dx$$

entspricht.  $a$  ist stetig und  $V$ -elliptisch auf  $H_0^1(\Omega)$ , wenn z.B.  $p, q \in C^0[a, b]$  und  $p > 0, q \geq 0$  auf  $[a, b]$ . Das Galerkin - Verfahren mit den Funktionen

$$V_h = H_0^1(a, b) \cap \mathcal{F}_h = \langle B_1, \dots, B_{n-1} \rangle$$

führt dann auf das Gleichungssystem  $Au = F$  mit

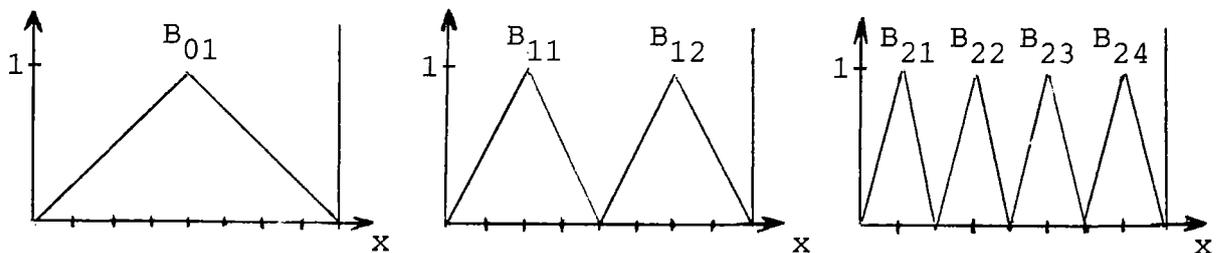
$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} \quad , \quad A = (a(B_i, B_k))_{i, k=1, \dots, n-1} \quad , \quad F = ((f, B_i)_{L_2(a, b)})_{i=1, \dots, n-1}$$

und

$$u_h = \sum_{i=1}^{n-1} u_i B_i$$

ist die Finite-Elemente-Näherung für  $u$ . Die  $u_i$  sind die Werte der globalen Freiheitsgrade von  $u_h$ , und  $A$  ist genau die Systemmatrix,  $F$  der Systemvektor. Die Kondition von  $A$  ist also nach Satz 13.1 von der Ordnung  $h^{-2}$ .

Wir führen nun anstelle von  $B_1, \dots, B_{n-1}$  die hierarchische Basis in  $V_h$  ein: Sei  $n = 2^j$ . Dann ist  $B_{k\ell}$ ,  $k=0, 1, \dots, j-1$ ,  $\ell=1, \dots, 2^k$  wie folgt definiert ( $n=8$ ):



Offenbar bilden die  $B_{k\ell}$  eine Basis von  $V_h$ . Diese ist orthogonal bezüglich des inneren Produktes

$$(u, v)_1 = \int_a^b u' v' dx \quad .$$

Zunächst ist klar, daß  $(B_{k\ell}, B_{k\ell'})_1 = 0$  für  $\ell \neq \ell'$ , weil die Träger von  $B_{k\ell}, B_{k\ell'}$  höchstens einen Punkt gemeinsam haben. Ist aber  $k < k'$ , so ist  $B_{k\ell}$  im Träger von  $B_{k',\ell'}$  konstant, und  $B_{k',\ell'}$  hat Mittelwert 0. Also ist  $(B_{k\ell}, B_{k',\ell'})_1 = 0$  für  $k < k'$  und alle  $\ell, \ell'$ . Weiter ist mit  $h_k = (b-a)2^{-k-1}$

$$(B_{k\ell}, B_{k\ell})_1 = 2h_k h_k^{-2} = 2h_k^{-1} \quad .$$

Setzen wir also

$$\tilde{B}_{k\ell} = (h_k/2)^{1/2} B_{k\ell} ,$$

so bilden die  $\tilde{B}_{k\ell}$  ein Orthonormalsystem in  $V_h$ . Die Entwicklungskoeffizienten von  $u_h \in V_h$  bezüglich der  $\tilde{B}_{k\ell}$  bezeichnen wir mit  $u_{k\ell}$ , also

$$u_h = \sum_{k,\ell} u_{k\ell} \tilde{B}_{k\ell} .$$

Dann ist

$$(u_h, u_h)_1 = \sum_{k,\ell} u_{k\ell}^2 .$$

Fassen wir die Komponenten  $u_{k\ell}$  in dem Vektor  $u$  zusammen, so ist also

$$|u_h|_{H^1(a,b)} = |u| = \text{euklidische Norm von } u .$$

Es gibt also Zahlen  $\alpha, M > 0$ , so daß

$$\alpha |u|^2 = \alpha |u_h|_{H^1(a,b)}^2 \leq a(u_h, u_h) \leq M |u_h|_{H^1(a,b)}^2 = M |u|^2 .$$

Ist nun  $B$  die Matrix des Galerkin-Verfahrens mit den Ansatzfunktionen  $\tilde{B}_{k\ell}$ , so gilt

$$(Bu, u) = a(u_h, u_h) .$$

Es folgt

$$\alpha |u|^2 \leq (Bu, u) \leq M |u|^2$$

und damit  $k(B) \leq \frac{M}{\alpha}$  .

Die Kondition von  $B$  ist also unabhängig von  $h$  beschränkt!

## T E I L   I V :

## NICHTKONFORME METHODE DER FINITEN ELEMENTE

## § 14 NICHTKONFORMES GALERKIN - VERFAHREN

Sei  $V$  ein Hilbert-Raum,  $a$  eine stetige,  $V$ -elliptische Bilinearform auf  $V$  und  $F$  ein beschränktes lineares Funktional auf  $V$ .

Wir betrachten die Variationsgleichung

$$u \in V \quad a(u, v) = F(v) \quad , \quad \forall v \in V \quad .$$

Für  $h > 0$  sei  $W_h$  ein Hilbert-Raum mit  $V \subseteq W_h$ , und  $V_h$  sei ein endlich-dimensionaler Unterraum von  $W_h$  (nicht notwendig  $V_h \subseteq V$ !).  $F$  sei auch auf  $W_h$  stetig, und es gebe eine Bilinearform  $a_h$  auf  $W_h$  mit

$$|a_h(u, w)| \leq M \|u\|_h \|w\|_h \quad , \quad a_h(w, w) \geq \alpha \|w\|_h^2 \quad , \quad \forall u, w \in V + V_h \quad .$$

Hierbei sind  $M$  und  $\alpha > 0$  von  $h$  unabhängige Konstanten, und  $\|\cdot\|_h$  ist eine Seminorm auf  $W_h$ , welche in  $V + V_h$  eine Norm ist. Die nichtkonforme Galerkin-Näherung  $u_h$  für  $u$  ist erklärt durch

$$u_h \in V_h \quad a_h(u_h, w) = F(w) \quad , \quad \forall w \in V_h \quad .$$

SATZ 14.1:  $u_h$  ist eindeutig bestimmt, und es gilt mit

$$d_h(u, w) = F(w) - a_h(u, w)$$

$$(14.1) \quad \|u - u_h\|_h \leq \left(1 + \frac{M}{\alpha}\right) \min_{w \in V_h} \|u - w\|_h + \frac{1}{\alpha} \sup_{w \in W_h} \frac{d_h(u, w)}{\|w\|_h} .$$

BEWEIS: Die Eindeutigkeit folgt durch Anwendung von Lax-Milgram auf  $V_h, a_h, F$ . Zur Fehlerabschätzung wählen wir  $w \in V_h$  und haben

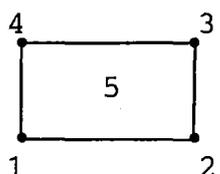
$$\begin{aligned} \alpha \|w - u_h\|_h^2 &\leq a_h(w - u_h, w - u_h) \\ &= a_h(w - u, w - u_h) + a_h(u - u_h, w - u_h) \\ &= a_h(w - u, w - u_h) + a_h(u, w - u_h) - a_h(u_h, w - u_h) \\ &= a_h(w - u, w - u_h) + a_h(u, w - u_h) - F(w - u_h) \\ &\leq M \|w - u\|_h \|w - u_h\|_h + a_h(u, w - u_h) - F(w - u_h) . \end{aligned}$$

Division durch  $\|w - u_h\|_h$  und die Dreiecksungleichung führen zur Abschätzung. ■

Wir wenden Satz 14.1 an auf

$$V = H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

und die Berechnung von  $u$  durch eine Finite-Elemente-Methode mit dem Wilson-Rechteck:



The diagram shows a rectangle with nodes labeled 1, 2, 3, 4 at the corners and node 5 at the center. Node 1 is at the bottom-left, 2 at the bottom-right, 3 at the top-right, and 4 at the top-left.

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$$

$$\Phi = \{p(a_i), \quad i=1, \dots, 4, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}(a_5), \quad \ell=1, 2\}$$

Dieses ist nicht von der Klasse  $C^0$ , der Finite-Elemente-Raum  $\mathcal{F}_h$  also kein Teil von  $H^1(\Omega)$ .

Wir setzen

$$W_h = \{w \in L_2(\Omega) : w|_E \in H^1(E) \quad \text{für alle Elemente } E \},$$

$$a_h(u, w) = \sum_E \int_E \nabla u \cdot \nabla w \, dx \quad ,$$

$$\|w\|_h = \left( \sum_E \|w\|_{H^1(E)}^2 \right)^{1/2} \quad ,$$

$$V_h = \{w \in \overline{F}_h : w = 0 \quad \text{in Randknoten}\}.$$

Dann ist

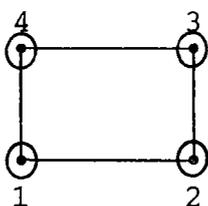
$$\begin{aligned} d_h(u, w) &= \int_{\Omega} f w \, dx - a_h(u, w) \\ &= \int_{\Omega} -\Delta u \cdot w \, dx - a_h(u, w) \\ &= \sum_E \left( \int_E -\Delta u \cdot w \, dx - \int_E \nabla u \cdot \nabla w \, dx \right) \\ &= \sum_E \int_{\partial E} \frac{\partial u}{\partial \nu} w \, d\sigma \quad . \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck bekommt man natürlich auch für andere Finite Elemente.

Als weiteres Beispiel behandeln wir die Platten-Gleichung, d.h.

$$V = H_0^2(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v \, dx \quad , \quad F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$$

und ihre Lösung durch Adini-Rechtecke:



$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_3 + \langle x_1^3 x_2^3, x_1^3 x_2 \rangle$$

$$\Phi = \{D^\alpha p(a_\ell) : \ell=1, \dots, 4, \quad |\alpha| \leq 1\} \quad .$$

Dieses Element ist nicht von der Klasse  $C^1$ , so daß  $\mathcal{F}_h$  nicht Teil von  $H^2(\Omega)$  ist.

Wir setzen

$$W_h = \{w \in H^1(\Omega) : w|_E \in H^2(E) \quad \text{für alle } E \}$$

$$a_h(u, w) = \sum_E \int_E \Delta u \cdot \Delta v \, dx \quad ,$$

$$\|w\|_h = \left( \sum_E |w|_{H^2(E)}^2 \right)^{1/2}$$

$$V_h = \{w \in \mathcal{F}_h : D^\alpha w = 0 \quad \text{für Randknoten, } |\alpha| \leq 1 \} \quad .$$

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} d_h(u, w) &= \int_\Omega fw \, dx - a_h(u, w) \\ &= \sum_E \left( \int_E \Delta^2 u \cdot w \, dx - \int_E \Delta u \cdot \Delta w \, dx \right) \\ &= \sum_E \int_{\partial E} \left( \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} w - \Delta u \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) d\sigma \quad . \end{aligned}$$

Für  $u \in H^4(\Omega)$  ist  $\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}$  für jede Kante  $\Gamma$  wohldefiniert, und  $w$  ist stetig: Also heben sich die Integrale

$$\int_\Gamma \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} w \, d\sigma$$

für innere Kanten weg, und für Randkanten ist  $w=0$ .

Also gilt

$$d_h(u, u) = - \sum_E \int_{\partial E} \Delta u \frac{\partial w}{\partial \nu} \, d\sigma \quad .$$

Der erste Term auf der rechten Seite von 14.1 ist uns wohlbekannt.  
Neu ist der zweite Term. Er ist ein Maß für die Nichtkonformität:  
Für  $w \in V$  ist

$$d_h(u,w) = a(u,w) - a_h(u,w) = 0$$

in den beiden betrachteten Beispielen.

Um Konvergenz  $u_h \rightarrow u$  zu beweisen, werden wir nachweisen, daß

$$d_h(u,w_h) \rightarrow 0 \quad \text{für } \|w_h\|_h = 1$$

gilt.

## § 15 DER PATCH - TEST

Irons hat 1965 folgenden Test vorgeschlagen: Sei  $F$  ein "patch", d.h. eine Vereinigung von Elementen  $E$ . Die Aufgabe

$$-\Delta u = f \quad \text{in } F$$

besitze eine Lösung  $u \in \mathcal{P}_1$ . Sei  $u_h$  die (nichtkonforme) Finite-Elemente-Näherung für  $u$ , d.h. die Lösung von

$$u_h - u \in V_h(F), \quad a_h(u_h, w) = (f, w)_{L_2(F)} \quad \forall w \in V_h(F) \quad .$$

Dabei ist  $V_h(F) = \{w \in \mathcal{I}_h : w = 0 \text{ außerhalb } F\}$ . Ist dann  $u_h = u$  in  $F$ , so gilt der Test als bestanden. Irons betrachtet das Bestehen des Testes als ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz bei beliebigen Aufgaben 2. Ordnung. Der entsprechende Test für Aufgaben 4. Ordnung verlangt, daß Lösungen  $u \in \mathcal{P}_2$  der Gleichung  $\Delta^2 u = f$  in  $F$  reproduziert werden.

Unterstellt man, daß  $u_h$  eindeutig bestimmt ist, so kann man den Patch-Test auch so formulieren: Für  $p \in \mathcal{P}_1$  (bzw.  $p \in \mathcal{P}_2$  im Falle einer Aufgabe 4. Ordnung) muß

$$d_h(p, w) = a_h(p, w) - (f, w)_{L_2(F)} = 0 \quad , \quad \forall w \in V_h(F)$$

sein.

SATZ 15.1: Das Wilson - Rechteck besteht den Patch - Test (für Probleme 2. Ordnung).

BEWEIS: Es ist zu zeigen, daß für  $p \in \mathcal{P}_1$  und  $w \in V_h(F)$

$$d_h(p, w) = \sum_E \int_{\partial E} \frac{\partial p}{\partial \nu} w \, d\sigma = 0 \quad .$$

Sei  $P$  die Interpolation in den Ecken von  $E$  mit Funktionen aus  $\bar{\mathcal{P}}_1$ . Dann ist  $Pw \in H^1(\Omega)$  und daher  $d_h(p, Pw) = 0$ . Also gilt

$$d_h(p, w) = \sum_E \int_{\partial E} \frac{\partial p}{\partial \nu} (w - Pw) \, d\sigma \quad .$$

Sei  $E = (-1, +1)^2$ . Dann sind die Formfunktionen des Wilson-Rechtecks

$$(1+x_1)(1+x_2)/4 \quad (N_1, \dots, N_4), \quad N_5 = 1-x_1^2, \quad N_6 = 1-x_2^2.$$

Da  $w - Pw$  an den Ecken  $(\pm 1, \pm 1)$  verschwindet, gilt

$$w - Pw = c_5(1-x_1^2) + c_6(1-x_2^2) \quad .$$

Für die Integrale über die beiden senkrechten Teile von  $\partial E$  erhalten wir daher

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \left( \frac{\partial p}{\partial x_1} (w - Pw) \right) (-1, x_2) \, dx_2 + \int_{-1}^{+1} - \left( \left( \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) (w - Pw) \right) (+1, x_2) \, dx_2 \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{\partial p}{\partial x_1} (-1, x_2) c_6 (1-x_2^2) \, dx_2 + \int_{-1}^{+1} - \left( \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) (-1, x_2) c_6 (1-x_2^2) \, dx_2 = 0, \end{aligned}$$

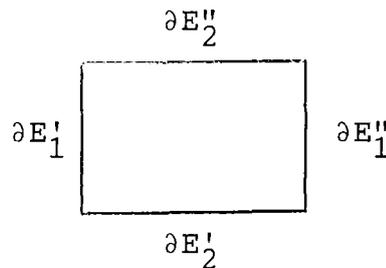
weil  $\frac{\partial p}{\partial x_1}$  konstant ist. Ebenso heben sich die Integrale über die waagerechten Teile von  $\partial E$  weg. Da man diesen Schluß für jedes Element  $E$  durchführen kann, ist  $d_h(p, w) = 0$  für  $p \in \bar{\mathcal{P}}_1$ . ■

**SATZ 15.2:** Das Adini-Rechteck besteht den Patch-Test (für Probleme der Ordnung 4).

BEWEIS: Es ist zu zeigen, daß für  $p \in \mathcal{P}_2$ ,  $w \in V_h(F)$

$$d_h(p, w) = \sum_E \int_{\partial E} \Delta p \frac{\partial w}{\partial \nu} d\sigma = 0 .$$

Wir zerlegen  $\partial E$  wie folgt:



Fassen wir die waagerechten und die senkrechten Randstücke zusammen, so erhalten wir

$$d_h(p, w) = d_h^1(p, w) + d_h^2(p, w), \quad d_h^j(p, w) = \sum_E \left\{ \int_{\partial E_j'} \Delta p \frac{\partial w}{\partial x_j} d\sigma - \int_{\partial E_j''} \Delta p \frac{\partial w}{\partial x_j} d\sigma \right\} .$$

Sei  $P$  der bilineare Interpolationsoperator. Da  $\frac{\partial w}{\partial x_j}$  in den Ecken wohldefiniert ist, hat  $Pw$  Sinn und ist eine stetige Funktion, welche auf Randkanten verschwindet. Also heben sich die Integrale

$$\int_{\partial E_j'} \Delta p P \frac{\partial w}{\partial x_j} d\sigma - \int_{\partial E_j''} \Delta p P \frac{\partial w}{\partial x_j} d\sigma$$

alle weg, und wir haben

$$d_h^j(p, w) = \sum_E \left\{ \int_{\partial E_j'} \Delta p (I-P) \frac{\partial w}{\partial x_j} d\sigma - \int_{\partial E_j''} \Delta p (I-P) \frac{\partial w}{\partial x_j} d\sigma \right\} .$$

Für  $w \in \mathcal{P}$  ist

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \gamma_0(x_1) + \gamma_1(x_1)x_2 + \gamma_2 x_2^2 + \gamma_3 x_2^3$$

mit Konstanten  $\gamma_2, \gamma_3$ . (I-P) bedeutet auf  $E_1', E_1''$  einfachen Fehler bei der linearen Interpolation in  $x_2$ . Da bei diesen linearen Funktionen in  $x_2$  keine Rolle spielen, gilt

$$(I-P) \frac{\partial w}{\partial x_1} = (I-P)(\gamma_2 x_2^2 + \gamma_3 x_3^2)$$

und dies ist unabhängig von  $x_1$ . Also stimmen die Restriktionen von  $(I-P) \frac{\partial w}{\partial x_1}$  auf  $\partial E_1'$  und  $\partial E_1''$  überein. Weil  $\Delta p$  konstant ist, folgt  $d_h^1(p, w) = 0$ . Entsprechend folgt  $d_h^2(p, w) = 0$  und damit  $d_h(p, w) = 0$ . ■

SATZ 15.3: Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet,  $W$  ein endlich-dimensionaler Teilraum von  $H^t(\Omega)$  mit  $\mathcal{P}_{t-1} \subseteq W$ . Sei  $b$  eine stetige Bilinearform auf  $H^s(\Omega) \times W$  mit

$$b(v, w) = 0 \quad \text{für } v \in \mathcal{P}_{s-1} \quad \text{oder} \quad w \in \mathcal{P}_{t-1} .$$

Dann gibt es eine Konstante  $C$ , so daß für alle  $v \in H^t(\Omega)$ ,  $w \in W$

$$|b(v, w)| \leq C |v|_{H^s(\Omega)} |w|_{H^t(\Omega)} .$$

BEWEIS: Für  $p \in \mathcal{P}_{s-1}$ ,  $q \in \mathcal{P}_{t-1}$  ist

$$\begin{aligned} |b(v, w)| &= |b(v-p, w)| = |b(v-p, w-q)| \\ &\leq \|b\| \|v-p\|_{H^s(\Omega)} \|w-q\|_{H^t(\Omega)} . \end{aligned}$$

Nach dem Bramble-Hilbert-Lemma (Satz 7.1) gibt es eine Konstante

C, so daß

$$\inf_{p \in \mathcal{P}_{s-1}} \|v-p\|_{H^s(\Omega)} \leq C |v|_{H^s(\Omega)}, \quad \inf_{q \in \mathcal{P}_{t-1}} \|w-q\|_{H^t(\Omega)} \leq C |w|_{H^t(\Omega)}.$$

Also folgt

$$\begin{aligned} |b(v,w)| &\leq \|b\| \inf_{p \in \mathcal{P}_{s-1}} \|v-p\|_{H^s(\Omega)} \inf_{q \in \mathcal{P}_{t-1}} \|w-q\|_{H^t(\Omega)} \\ &\leq C^2 \|b\| |v|_{H^s(\Omega)} |w|_{H^t(\Omega)}. \end{aligned}$$

Wir wenden den Satz mit  $\Omega = E$ ,  $W = \mathcal{P}$ ,  $s=2$ ,  $t=1$  an auf

$$b_E(v,w) = \int_{\partial E} \frac{\partial v}{\partial \nu} (w-Pw) d\sigma$$

für das Wilson-Rechteck. In Beweis zu Satz 15.1 haben wir gesehen, daß  $b_E(v,w) = 0$  für  $v \in \mathcal{P}_1$  und  $w \in \mathcal{P}$ . Für  $w \in \mathcal{P}_0$  ist  $w = Pw$  und damit  $b_E(v,w) = 0$  für  $v \in H^2(E)$ ,  $w \in \mathcal{P}_0$ . Also gibt es eine Konstante C, so daß für  $v \in H^2(E)$ ,  $w \in \mathcal{P}$

$$|b_E(v,w)| \leq C |v|_{H^2(E)} |w|_{H^1(E)}.$$

Sei nun  $E$  das Referenzelement und  $E_h = hE$ . Wie in §7 setzen wir  $v_h(x) = v(x/h)$  usw. und haben dann (siehe Beweis zu Satz 7.3)

$$|v_h|_{H^2(E_h)} = \frac{1}{h} |v|_{H^2(E)}, \quad |w_h|_{H^1(E_h)} = |w|_{H^1(E)},$$

$$\begin{aligned} b_{E_h}(v_h, w_h) &= \int_{\partial E_h} \frac{\partial v_h}{\partial \nu} (w_h - P_h w_h) d\sigma = \int_{\partial E} \frac{\partial v}{\partial \nu} (w - Pw) d\sigma \\ &= b_E(v, w) \end{aligned}$$

Also wird

$$|b_{E_h}(v_h, w_h)| \leq C h |v_h|_{H^2(E_h)} |w_h|_{H^1(E_h)}$$

Summation über alle Elemente ergibt

$$\begin{aligned} |d_h(v, w)| &= \left| \sum_{E_h} b_{E_h}(v_h, w_h) \right| \\ &\leq C h \sum_{E_h} |v_h|_{H^2(E_h)} |w_h|_{H^1(E_h)} \\ &\leq C h \left( \sum_{E_h} |v_h|_{H^2(E_h)}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{E_h} |w_h|_{H^1(E_h)}^2 \right)^{1/2} \\ &= C h |v|_{H^2(\Omega)} \|w\|_h \end{aligned}$$

wobei  $v = v_h$ ,  $w = w_h$  in  $E_h$ .

Sei nun  $u$  die exakte Lösung des Problems 2. Ordnung. Nach Satz 14.1 bekommen wir für die nichtkonforme Methode mit Wilson - Rechtecken die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_h &\leq 2 \inf_{w \in W_h} \|u - w\| + \sup_{w \in W_h} \frac{d_h(u, w)}{\|w\|_h} \\ &\leq C h |u|_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

und damit Konvergenz für  $h \rightarrow 0$ .

Behandeln wir entsprechend das Problem 4. Ordnung mit dem Adini - Rechteck. Wir wenden Satz 15.3 an mit  $\Omega = E$ ,  $s = 3$ ,  $t = 2$ ,  $W = \mathcal{P}$  und

$$b_E^j(v, w) = \int_{\partial E_j^+} \Delta v (I-P) \frac{\partial w}{\partial x_j} - \int_{\partial E_j''} \Delta v (I-P) \frac{\partial w}{\partial x_j} .$$

Wie in Satz 15.2 zeigen wir, daß  $b_E^j(v, w) = 0$  für  $v \in \mathcal{P}_2$ , und  $b_E^j(v, w) = 0$  für  $w \in \mathcal{P}_1$  ist wieder trivial. Also hat man

$$|b_E^j(v, w)| \leq C |v|_{H^3(E)} |w|_{H^2(E)}$$

in  $H^3(E) \times \mathcal{P}$ . Mit  $E_h = hE$ ,  $v_h(x) = v(x/h)$  usw. wird

$$|v_h|_{H^3(E_h)} = h^{-2} |v|_{H^3(E)} , \quad |w_h|_{H^2(E_h)} = h^{-1} |w|_{H^2(E)} ,$$

$$b_{E_h}^j(v_h, w_h) = \int_{\partial E_{hj}} \Delta v_h (I-P) \frac{\partial w}{\partial x_j} d\sigma = h^{-2} \int_{\partial E_j} \Delta v (w - Pw) d\sigma$$

und damit

$$|b_{E_h}^j(v_h, w_h)| \leq C h |v_h|_{H^3(E_h)} |w|_{H^2(E_h)} .$$

Von hier an verläuft der Schluß wie beim Problem 2. Ordnung, und wir bekommen für  $u \in H^3(\Omega)$  Konvergenz der Ordnung  $h$ .

## T E I L V :

## NICHTLINEARE PROBLEME

## § 16 VARIATIONSUNGLEICHUNGEN

Sei  $V$  ein Hilbertraum,  $a$  eine stetige  $V$ -elliptische Bilinearform, und  $F$  ein stetiges lineares Funktional auf  $V$ . Sei  $U$  eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge von  $V$ . Das Problem:

$$(16.1) \quad u \in U \quad a(u, v-u) \geq F(v-u) \quad \forall v \in U$$

heißt Variationsungleichung.

SATZ 16.1: Sei  $a$  symmetrisch und

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - F(v) \quad .$$

Dann gilt:  $u$  minimiert  $J(\dot{v})$  in  $U$  genau dann, wenn (16.1) erfüllt ist.

BEWEIS: Es ist

$$J(v) = J(u) + a(u, v-u) - F(v-u) + \frac{1}{2} a(v-u, v-u) \quad .$$

Ist also (16.1) erfüllt, so löst  $u$  das Minimierungsproblem, und umgekehrt.

SATZ 16.2: Die Variationsungleichung ist eindeutig lösbar.

BEWEIS:  $V$  mit dem inneren Produkt  $(u, v)_a = a(u, v)$  ist  $V$  ein Hilbert-

raum  $V_a$ , dessen Norm äquivalent zur Norm in  $V$  ist. Also ist  $F$  auch stetig auf  $V_a$ , und es gibt ein Element  $f \in V_a$  mit  $F(v) = (f, v)_a$ ,  $\forall v \in V$ . Damit ist

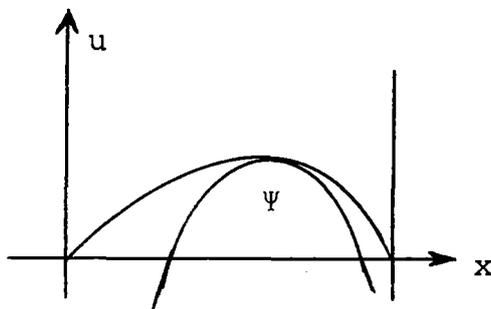
$$J(v) = \frac{1}{2} (v-f, v-f)_a - \frac{1}{2} (f, f)_a \quad .$$

$u$  ist also die orthogonale Projektion von  $f$  auf  $U$  im Sinne von  $V_a$ .

BEISPIEL: Sei  $V = H_0^1(\Omega)$ ,  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ ,  $F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$ ,

$U = \{v \in V : u \geq \psi\}$  mit einer meßbaren Funktion  $\psi$  auf  $\Omega$ .

$u$  bedeutet dann die Auslenkung einer entlang  $\partial\Omega$  eingespannten Membran, welche nicht unter dem "Hindernis"  $\psi$  liegen kann:



Sei  $V_h$  ein endlichdimensionaler Teilraum von  $V$  und  $U_h$  eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von  $V_h$ . Es ist nicht notwendig  $U_h \subseteq U$ . Die Galerkin-Approximation  $u_h$  für  $u$  ist erklärt durch

$$u_h \in U_h \quad a(u_h, v-u_h) \geq F(v-u_h) \quad , \quad \forall v \in U_h \quad .$$

Äquivalent ist das Minimieren von  $J(v)$  in  $U_h$ .

Für die Abschätzung des Fehlers  $u-u_h$  legen wir folgende Situation zugrunde:

$$V = H_0^1(\Omega), \quad a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$$

mit  $f \in L_2(\Omega) = H$ . Wir setzen weiter  $u \in H^2(\Omega)$  voraus. Mit  $A$  bezeichnen wir den zu  $a$  gehörigen Differentialoperator, also  $A = -\Delta$ .

SATZ 16.3: Es gibt eine von  $h$  unabhängige Konstante  $C$ , so daß

$$\|u - u_h\|_V \leq C \left\{ \inf_{v_h \in U_h} \left( \|u - v_h\|_H^2 + \|Au - f\|_H \|u - v_h\|_H \right) + \|Au - f\|_H \inf_{v \in U} \|u_h - v\|_V \right\}^{1/2}.$$

BEWEIS: Es ist

$$a(u,u) \leq a(u,v) + (f, u-v), \quad \forall v \in U$$

$$a(u_h, u_h) \leq a(u_h, v_h) + (f, u_h - v_h), \quad \forall v_h \in U_h.$$

Also bekommen wir für  $v \in U$ ,  $v_h \in U_h$

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V^2 &= a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u, u) + a(u_h, u_h) - a(u, u_h) - a(u_h, u) \\ &\leq a(u, v - u_h) + (f, u - v) + a(u_h, v_h - u) + (f, u_h - v_h) \\ &= a(u, v - u_h) - (f, v - u_h) + a(u, v_h - u) - (f, v_h - u) \\ &\quad + (f, u - u_h) + a(u_h - u, v_h - u) + (f, u_h - u) \\ &= (Au - f, v - u_h) + (Au - f, v_h - u) + a(u_h - u, v_h - u) \\ &\leq \|Au - f\|_H (\|v - u_h\|_H + \|v_h - u\|_H) + \|u_h - u\|_V \|v_h - u\|_V \\ &\leq \|Au - f\|_H (\|v - u_h\|_H + \|v_h - u\|_H) + \frac{1}{2} \|u_h - u\|_V^2 + \frac{1}{2} \|v_h - u\|_V^2. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\|u - u_h\|_V^2 \leq \|v_h - u\|_V^2 + 2\|Au - f\|_H (\|v - u_h\|_H + \|v_h - u\|_H) \quad . \quad \blacksquare$$

Wir wollen den Satz anwenden auf die Membran mit Hindernis.  $V_h$  sei gegeben durch lineare Finite Elemente auf einer Triangulierung, welche die Gleichförmigkeitsbedingung erfüllt, und es sei

$$U_h = \{v_h \in V_h : v_h \geq \psi \text{ in Knoten } a_i\} \quad .$$

Dies führt auf das diskrete Problem: Minimiere

$$u^T A' u - 2 u^T F', \quad u_i \geq \psi(a_i) \quad , \quad i=1, \dots, M-R,$$

vgl. § 10 für die Bezeichnung. Dies ist ein quadratisches Optimierungsproblem mit linearen Ungleichungen als Nebenbedingungen.

Sei  $P_h$  die lineare Interpolation in den  $a_i$ . Dann ist  $P_h u \in U_h$  für  $u \in U$ . Nach Satz 8.2 ist

$$\|u - P_h u\|_{H^t(\Omega)} \leq C h^{2-t} \|u\|_{H^2(\Omega)} \quad , \quad t = 0, 1 \quad .$$

Also wird für  $u \in H^2(\Omega)$

$$\inf_{v_h \in V_h} \{ \|u - v_h\|_V^2 + \|Au - f\|_H \|u - v_h\|_H \} \leq C h^2 \quad ,$$

wobei  $C$  nur von  $u$  und  $f$  abhängt. Bleibt noch der Ausdruck

$$\inf_{v \in U} \|u_h - v\|_H$$

abzuschätzen. Sei  $u_h^*(x) = \text{Max} \{u_h(x), \psi(x)\}$ . Es ist  $u_h^* \in H^1(\Omega)$  (dies ist plausibel, aber nicht ganz einfach zu beweisen) und  $u_h^* \geq \psi$ , also  $u_h^* \in U$ . Wegen  $u_h \geq P_h \psi$  ist weiter

$$\Psi - u_h \leq \Psi - P_h \Psi$$

und damit

$$\|u_h^* - u_h\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{u_h < \Psi} (\Psi - u_h)^2 dx \leq \int_{\Omega} (\Psi - P_h \Psi)^2 dx \leq C h^2 |\Psi|_{H^2(\Omega)}^2 .$$

Also gilt mit einer Konstanten  $C = C(u, f, \Psi)$

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C h .$$

## § 17 STRENG MONOTONE OPERATOREN

Wir wollen nun Probleme mit nichtlinearen Differentialoperatoren behandeln. Dazu müssen wir die Hilberträume  $H^S(\Omega)$  durch Banach-Räume  $W^{S,p}(\Omega)$  ersetzen. Ohne auf mathematische Feinheiten einzugehen, setzen wir

$$W^{0,p}(\Omega) = L_p(\Omega) = \left\{ f : \|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ f : \|f\|_{1,p} = \left( \int_{\Omega} |\nabla f|^p dx \right)^{1/p} < \infty, f=0 \text{ auf } \partial\Omega \right\}.$$

Hier bedeutet  $\|\cdot\|$  nach wie vor die euklidische Norm, und  $1 < p < \infty$ . Wir werden von der Hölder'schen Ungleichung

$$\left| \int_{\Omega} f g dx \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Gebrauch machen.

Sei  $V$  ein normierter Raum und  $v \rightarrow a(u,v)$  für jedes  $u \in V$  ein lineares Funktional auf  $V$  mit folgenden Eigenschaften:

1) Für jedes  $r > 0$  gibt es eine Zahl  $M(r)$  mit

$$|a(u,w) - a(v,w)| \leq M(r) \|u-v\| \|w\|$$

$$u, v, w \in V, \quad \|u\|, \|v\| \leq r.$$

2) Es gibt eine streng monoton wachsende Funktion  $\alpha$  auf  $(0, \infty)$  mit  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(t) \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$  und

$$a(u, u-v) - a(v, u-v) \geq \alpha(\|u-v\|) \|u-v\|$$

Sei weiter  $F$  ein stetiges lineares Funktional auf  $V$ .

Wir betrachten nun die Variationsgleichung

$$u \in V \quad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V \quad .$$

SATZ 17.1: Die Variationsgleichung hat höchstens eine Lösung. Ist  $u$  eine Lösung, so gilt

$$\alpha(\|u\|) \leq \|F\| + \sup_{v \in V} \frac{|a(0, v)|}{\|v\|}$$

BEWEIS: Sind  $u_1, u_2$  Lösungen, so ist

$$a(u_1, v) - a(u_2, v) = 0 \quad , \quad \forall v \in V \quad .$$

Mit  $v = u_1 - u_2$  folgt aus 2)

$$\alpha(\|u_1 - u_2\|) \|u_1 - u_2\| \leq a(u_1, u_1 - u_2) - a(u_2, u_1 - u_2) = 0$$

und damit  $\|u_1 - u_2\| = 0$ . Ist  $u$  eine Lösung, so folgt aus 2) mit  $v = 0$

$$\alpha(\|u\|) \|u\| \leq a(u, u) - a(0, u) = F(u) - a(0, u)$$

$$\leq \left( \|F\| + \sup_{v \in V} \frac{a(0, v)}{\|v\|} \right) \|u\| \quad .$$

■

Sei nun  $V_h$  ein endlich-dimensionaler Teilraum von  $V$  und  $u_h$  die Galerkin-Näherung für  $u$ , also

$$u_h \in V_h \quad a(u_h, v) = F(v) \quad \forall v \in V_h \quad .$$

SATZ 17.2: Es gibt höchstens eine Galerkin-Näherung  $u_h$ . Hat die Variationsgleichung eine Lösung  $u$ , so gilt mit einer von  $h$  unabhängigen Konstanten  $C$

$$\alpha(\|u-u_h\|) \leq C \inf_{v \in V_h} \|u-v\| \quad .$$

BEWEIS: Existiert  $u_h$ , so ist  $u_h$  nach Satz 17.1 eindeutig bestimmt und erfüllt die gleiche Abschätzung wie  $u$ . Also

$$\|u\|, \|u_h\| \leq \alpha^{-1} \left( \|F\| + \sup_{v \in V} \frac{|a(0,v)|}{\|v\|} \right) = r \quad .$$

Sei nun  $v \in V_h$  beliebig. Dann ist

$$a(u, u_h - v) - a(u_h, u_h - v) = 0$$

und damit

$$\begin{aligned} \alpha(\|u-u_h\|) \|u-u_h\| &\leq a(u, u-u_h) - a(u_h, u-u_h) \\ &\leq a(u, u-v) - a(u_h, u-v) \\ &\leq M(r) \|u-u_h\| \|u-v\| \quad . \end{aligned}$$

Nun folgt die Behauptung mit  $C = M(r)$ .

BEISPIEL:  $V = W_0^{1,p}(\Omega)$  mit  $p \geq 2$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ,

$$a(u,v) = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad , \quad F(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$$

mit  $f \in L_q(\Omega)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

SATZ 17.3: Die Form  $a$  erfüllt die Voraussetzungen 1), 2) von Satz 17.1 mit

$$\alpha(t) = \alpha t^{p-1} \quad , \quad M(r) = M r^{p-2} \quad .$$

BEWEIS: Wir führen die Funktionen

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{(|\xi|^{p-2} \xi - |\eta|^{p-2} \eta) \cdot (\xi - \eta)}{|\xi - \eta|^p}$$

$$\Psi(\xi, \eta) = \frac{||\xi|^{p-2} \xi - |\eta|^{p-2} \eta|}{|\xi - \eta| (|\xi| + |\eta|)^{p-2}}$$

auf  $O = \{(\xi, \eta) : \xi, \eta \in \mathbb{R}^d, \xi \neq \eta\}$  ein und zeigen:

Es gibt Konstanten  $\alpha > 0$ ,  $M$  mit

$$\Phi(\xi, \eta) \geq \alpha, \quad \Psi(\xi, \eta) \leq M$$

auf  $O$ . Offenbar folgt 2) aus der Ungleichung für  $\Phi$ . Aus der Ungleichung für  $\Psi$  bekommen wir

$$\begin{aligned} |a(u, w) - a(v, w)| &= \left| \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \cdot \nabla w \, dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} ||\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v| |\nabla w| \, dx \\ &\leq M \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v| (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2} |\nabla w| \, dx. \end{aligned}$$

Hier benutzen wir die iterierte Hölder'sche Ungleichung

$$\left| \int_{\Omega} f g h \, dx \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

mit den Exponenten  $p$ ,  $\frac{p}{p-2}$ ,  $p$  und erhalten

$$|a(u, w) - a(v, w)| \leq M |u - v|_{1, p} \left( \int_{\Omega} (|\nabla u| + |\nabla v|)^p \, dx \right)^{\frac{p-2}{p}} |w|_{1, p}.$$

Wir zeigen nun die Ungleichung für  $\Phi$ ; diejenige für  $\Psi$  wird ähnlich gezeigt.  $\Phi$  ist stetig auf  $O$ . Wir zeigen,  $\Phi > 0$  auf  $O$ . Es ist

$$\begin{aligned}
(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta)(\xi - \eta) &= |\xi|^p + |\eta|^p - (|\xi|^{p-2} + |\eta|^{p-2})\xi \cdot \eta \\
&\geq |\xi|^p + |\eta|^p - (|\xi|^{p-2} + |\eta|^{p-2})|\xi||\eta| \\
&= |\xi|^p + |\eta|^p - |\xi|^{p-1}|\eta| - |\eta|^{p-1}|\xi| \\
&= (|\xi|^{p-1} - |\eta|^{p-1})(|\xi| - |\eta|)
\end{aligned}$$

Dies ist positiv falls  $|\xi| \neq |\eta|$  oder, da in diesem Fall die Schwarz'sche Ungleichung streng ist, falls  $\xi, \eta$  l.u. sind. Bleibt noch der Fall, daß  $|\xi| = |\eta|$  und  $\xi = -\eta$ . Dann ist

$$(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta) \cdot (\xi - \eta) = 4 |\xi|^p > 0$$

Also  $\phi > 0$  auf  $O$ .

Nun rechnet man noch nach, daß

$$\phi(\xi, 0) = 1, \quad \xi \neq 0$$

$$\phi(0, \eta) = 1, \quad \eta \neq 0$$

$$\phi(\xi, \eta) \rightarrow c, \quad \eta \rightarrow \xi$$

mit  $c = 1$  für  $p = 2$ ,  $c = \infty$  für  $p > 2$  und kann schließen, daß  $\phi \geq \alpha > 0$ .

■

## T E I L VI

## DÜNNE SCHALEN

## § 18 DIFFERENTIALGEOMETRISCHE GRUNDLAGEN

Sei durch  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Fläche beschrieben. Wir setzen  $f \in C^3(\Omega)$  voraus, und

$$f' = \left( \frac{\partial f}{\partial \xi_1}, \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \right) = (f_1, f_2)$$

habe an allen Punkten  $\xi \in \Omega$  den Rang 2. Die Spalten von  $f'(\xi)$  spannen den Tangentialraum der Fläche im Punkt  $f(\xi)$  auf. Die Normale  $n$  ist definiert durch

$$n = \frac{f_1 \times f_2}{|f_1 \times f_2|} .$$

Die Matrizen (genauer: die von ihnen erzeugten quadratischen Formen)

$$g = f'^T f'$$

$$h = -n'^T f'$$

$$k = n'^T n'$$

heißen die 1., 2. bzw. 3. (Gauß'sche) Fundamentalform der Fläche. Alle drei Matrizen sind symmetrisch, und  $g$  sogar positiv definit. Für  $g, k$  ist dies klar. Für  $h$  schließen wir dies aus  $n^T f_i = 0$ , d.h.

$$0 = \frac{\partial}{\partial \xi_j} (n^T f_i) = \frac{\partial n^T}{\partial \xi_j} f_i + n^T \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} = -h_{ij} + n^T \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}$$

oder

$$(18.1) \quad h_{ij} = n^T \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} = n^T \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = h_{ji} \quad .$$

Das Oberflächenmaß  $dS$  auf der Fläche ist

$$dS = \sqrt{\det(g)}' d\xi \quad .$$

Zur Herleitung betrachten wir das kleine Dreieck  $\xi, \xi + h e_1, \xi + h e_2$  in der  $\xi$ -Ebene. Auf der Fläche entspricht ihm - bis auf  $O(h^2)$  - das Dreieck  $f(\xi), f(\xi) + h f_1(\xi), f(\xi) + h f_2(\xi)$  mit der Fläche

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} h^2 |f_1| |f_2| \sin(\angle (f_1, f_2)) = \\ & = \frac{1}{2} h^2 |f_1| |f_2| (1 - \cos^2(\angle (f_1, f_2)))^{1/2} \\ & = \frac{1}{2} h^2 |f_1| |f_2| \left( 1 - \left( \frac{(f_1, f_2)}{|f_1| |f_2|} \right)^2 \right)^{1/2} \\ & = \frac{1}{2} h^2 \sqrt{\det(g)}' \quad . \end{aligned}$$

Als Beispiel betrachten wir

$$f(\xi) = \begin{pmatrix} R \cos \xi_1 \\ R \sin \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \Omega = (\alpha, \beta) \times (-H, H) \quad ,$$

also ein Stück einer Zylinderoberfläche. Wir berechnen

$$f'(\xi) = \begin{pmatrix} -R \sin \xi_1 & 0 \\ R \cos \xi_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g(\xi) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad dS = R d\xi$$

$$n(\xi) = \begin{pmatrix} \cos \xi_1 \\ \sin \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n'(\xi) = \begin{pmatrix} -\sin \xi_1 & 0 \\ \cos \xi_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$h(\xi) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die zweiten Ableitungen  $\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}$  lassen sich als Linearkombination von  $f_1, f_2$  und  $n$  schreiben. Mit den Cristoffel-Symbolen (2. Art)  $\Gamma_{ij}^k$  lauten diese

$$(18.2) \quad \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k f_k + h_{ij} n.$$

Daß der Koeffizient von  $n$  tatsächlich  $h_{ij}$  ist, folgt durch Linksmultiplikation mit  $n^T$  und (18.1). Durch Linksmultiplikation mit  $f_\ell^T$  erhält man

$$f_\ell^T \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k g_{\ell k}.$$

Für jedes Paar  $i, j$  ist dies ein lineares Gleichungssystem für  $\Gamma_{ij}^k, k=1,2$ . Dieses besitzt die Lösung

$$(18.3) \quad \Gamma_{ij}^k = \sum_{\ell=1}^2 g^{k\ell} f_\ell^T \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j},$$

wobei  $(g^{k\ell})$  die Matrix  $g^{-1}$  bezeichnet.

Sei nun  $v$  ein tangentiales Vektorfeld, also

$$v = \sum_{k=1}^2 v^k f_k.$$

Die  $v^k$  heißen die kontravarianten Komponenten von  $v$ . Natürlich

braucht  $\frac{\partial v}{\partial \xi_j}$  nicht mehr tangential zu sein. Die Projektion auf den Tangentialraum  $\langle f_1, f_2 \rangle$  entlang  $n$  nennt man die kovarianten Ableitungen von  $v$ . Es ist nach (18.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \xi_j} &= \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial v^i}{\partial \xi_j} f_i + v^i f_{ij} \right) \\ &= \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial v^i}{\partial \xi_j} f_i + v^i \left( \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k f_k + h_{ij} n \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^2 \left( \frac{\partial v^k}{\partial \xi_j} + \sum_{i=1}^2 \Gamma_{ij}^k v^i \right) f_k + \sum_{i=1}^2 h_{ij} v^i n . \end{aligned}$$

Die kovariante Ableitung von  $v$  ist also

$$\sum_{k=1}^2 v^k |_{,j} f_k , \quad v^k |_{,j} = \frac{\partial v^k}{\partial \xi_j} + \sum_{i=1}^2 \Gamma_{ij}^k v^i .$$

Wir benötigen die Darstellung der kovarianten Ableitungen auch bezüglich der Basis

$$f^\ell = \sum_{k=1}^2 g^{\ell k} f_k , \quad \ell = 1, 2$$

des Tangentialraumes. Sei also

$$v = \sum_{i=1}^2 v_i f^i .$$

Die  $v_i$  heißen die kovarianten Komponenten von  $v$ . Wir werden zeigen, daß die kovariante Ableitung von  $v$

$$(18.4) \quad \sum_{k=1}^2 v_k |_{,j} f^k , \quad v_k |_{,j} = \frac{\partial v_k}{\partial \xi_j} - \sum_{i=1}^2 \Gamma_{kj}^i v_i$$

ist. Dazu berechnen wir

$$\frac{\partial f^\ell}{\partial \xi_j} = \sum_{k=1}^2 \left( \frac{\partial g^{\ell k}}{\partial \xi_j} f_k + g^{\ell k} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^2 \left( \frac{\partial g^{\ell k}}{\partial \xi_j} f_k + g^{\ell k} \left( \sum_{i=1}^2 \Gamma_{kj}^i f_i + h_{kj}^n \right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^2 \left( \frac{\partial g^{\ell k}}{\partial \xi_j} \sum_{m=1}^2 g_{km} f^m + g^{\ell k} \left( \sum_{i=1}^2 \Gamma_{kj}^i \sum_{m=1}^2 g_{im} f^m + h_{kj}^n \right) \right) .
\end{aligned}$$

In der ersten Summe benutzen wir

$$0 = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \sum_{k=1}^2 g^{\ell k} g_{km} = \sum_{k=1}^2 \left( \frac{\partial g^{\ell k}}{\partial \xi_j} g_{km} + g^{\ell k} \frac{\partial g_{km}}{\partial \xi_j} \right)$$

und erhalten

$$\frac{\partial f^{\ell}}{\partial \xi_j} = \sum_{k=1}^2 g^{\ell k} \left( \sum_{m=1}^2 \left( - \frac{\partial g_{km}}{\partial \xi_j} + \sum_{i=1}^2 \Gamma_{kj}^i g_{im} \right) f^m + h_{kj}^n \right) .$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{km}}{\partial \xi_j} &= \frac{\partial}{\partial \xi_j} (f_k^T f_m) = \left( \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j} \right)^T f_m + f_k^T \left( \frac{\partial f_m}{\partial \xi_j} \right) \\
&= \left( \sum_{i=1}^2 \Gamma_{kj}^i f_i \right)^T f_m + f_k^T \left( \sum_{i=1}^2 \Gamma_{mj}^i f_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^2 (\Gamma_{kj}^i g_{im} + \Gamma_{mj}^i g_{ki})
\end{aligned}$$

wird daraus

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f^{\ell}}{\partial \xi_j} &= \sum_{k=1}^2 g^{\ell k} \left( - \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^2 \Gamma_{mj}^i g_{ki} f^m + h_{kj}^n \right) \\
&= - \sum_{m=1}^2 \sum_{i=1}^2 \delta_{\ell i} \Gamma_{mj}^i f^m + \sum_{k=1}^2 g^{\ell k} h_{kj}^n
\end{aligned}$$

mit dem Kronecker - Symbol  $\delta_{\ell i}$  . Also erhalten wir

$$(18.5) \quad \frac{\partial f^{\ell}}{\partial \xi_j} = - \sum_{m=1}^2 \Gamma_{mj}^{\ell} f^m + \sum_{k=1}^2 g^{\ell k} h_{kj}^n .$$

Dies ist das Analogon zu (18.2). Der Beweis von (18.4) ist nun einfach: Bis auf Vielfache von  $n$  ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \xi_j} &= \sum_{\ell=1}^2 \left( \frac{\partial v_\ell}{\partial \xi_j} f^\ell + v_\ell \frac{\partial f^\ell}{\partial \xi_j} \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^2 \left( \frac{\partial v_\ell}{\partial \xi_j} f^\ell - v_\ell \sum_{m=1}^2 \Gamma_{mj}^\ell f^m \right) \\ &= \sum_{k=1}^2 \left( \frac{\partial v_k}{\partial \xi_j} - \sum_{\ell=1}^2 \Gamma_{kj}^\ell v_\ell \right) f^k . \end{aligned}$$

Wir definieren noch

$$v_\ell^k |_{,j} = \frac{\partial v_\ell^k}{\partial \xi_j} + \sum_i \Gamma_{ij}^k v_\ell^i - \sum_i \Gamma_{\ell j}^i v_i^k .$$

Schließlich brauchen wir noch eine weitere Formel: Aus  $n^T n = 1$  folgt, daß  $\frac{\partial n}{\partial \xi_j}$  auf  $n$  senkrecht steht. Also gilt

$$\frac{\partial n}{\partial \xi_j} = \sum_k \alpha_{jk} f_k$$

mit gewissen Zahlen  $\alpha_{jk}$ . Multiplikation von links mit  $f_\ell^T$  ergibt

$$- h_{j\ell} = \sum_k \alpha_{jk} g_{k\ell} ,$$

also

$$\alpha_{jk} = - \sum_\ell h_{j\ell} g^{k\ell}$$

oder

$$\frac{\partial n}{\partial \xi_j} = - \sum_{\ell,k} h_{j\ell} g^{k\ell} f_k .$$

## § 19 DAS SCHALENMODELL VON KOITER

Eine dünne Schale sei beschrieben durch ihre Mittelfläche  $x = f(\xi)$  und ihre Dicke  $d$ , d.h. die Schale ist gegeben durch

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3: x = f(\xi) + \delta n(\xi), \quad |\delta| \leq d/2, \quad \xi \in \Omega\}.$$

Durch eine Verzerrung  $x \rightarrow \tilde{x} = x + u$  gehe sie über in eine Schale  $\tilde{S}$ . In jedem Punkt  $x = f(\xi)$  der Fläche geben wir  $u$  als Funktion von  $\xi$  im lokalen Koordinatensystem  $f^1, f^2, n$  an, also

$$u = \sum_i u_i f^i + u_3 n.$$

Die Bestimmung der Verzerrung  $u$ , d.h. der Funktionen  $u_i(\xi)$ , welche bei Belastung der Schale zum Gleichgewicht führt, ist unser Ziel. In § 4 hatten wir schon den Spezialfall des zweidimensionalen Spannungszustandes ebener Platten studiert.

Die verzerrte Schale  $\tilde{S}$  werde wie  $S$  durch eine Funktion  $\tilde{f}$  beschrieben, also  $\tilde{x} = \tilde{f}(\xi) = f(\xi) + u(\xi)$ . Wir werden von jetzt an alle Größen, die sich auf  $\tilde{S}$  beziehen, mit einer Tilde versehen.

Wir führen die beiden Tensoren

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (\tilde{g}_{ik} - g_{ik}), \quad \rho_{ik} = (\tilde{h}_{ik} - h_{ik})$$

ein.  $\varepsilon_{ik}$  heißt Drehungstensor,  $\rho_{ik}$  Tensor der Krümmungsänderung. Wir wollen beide Tensoren für kleine Verzerrungen durch  $u$  ausdrücken.

Nach § 18 haben wir

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_j &= \frac{\partial}{\partial \xi_j} (f + \sum_i u^i f_i + u^3 n) \\
&= f_j + \sum_i \left( \frac{\partial u^i}{\partial \xi_j} f_i + u^i \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} \right) + \frac{\partial u^3}{\partial \xi_j} n + u^3 \frac{\partial n}{\partial \xi_j} \\
&= f_j + \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \xi_j} f_i + \sum_i u^i \left( \sum_k \Gamma_{ij}^k f_k + h_{ij} n \right) \\
&\quad + \frac{\partial u^3}{\partial \xi_j} n - u^3 \sum_{\ell, k} h_{j\ell} g^{\ell k} f_k \\
&= f_j + \sum_k \left( \frac{\partial u^k}{\partial \xi_j} + \sum_i \Gamma_{ij}^k u^i - u^3 \sum_{\ell} h_{j\ell} g^{\ell k} \right) f_k \\
&\quad + \left( \frac{\partial u^3}{\partial \xi_j} + \sum_i u^i h_{ij} \right) n \\
&= f_j + \sum_k \alpha_{jk} f_k + \beta_j n \quad , \\
\alpha_{jk} &= u^k |_{j} - u^3 \sum_{\ell} h_{j\ell} g^{\ell k}, \quad \beta_j = \frac{\partial u^3}{\partial \xi_j} + \sum_i u^i h_{ij} \quad .
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich bis auf  $\mathcal{O}(u^2)$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{ij} &= \tilde{f}_i^T \tilde{f}_j = (f_i + \sum_k \alpha_{ik} f_k + \beta_i n)^T (f_j + \sum_k \alpha_{jk} f_k + \beta_j n) \\
&= g_{ij} + \sum_k (\alpha_{jk} g_{ik} + \alpha_{ik} g_{kj}) \quad .
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \sum_k \left( u^k |_{j} - u^3 \sum_{\ell} h_{j\ell} g^{\ell k} \right) g_{ik} + \left( u^k |_{i} - u^3 \sum_{\ell} h_{i\ell} g^{\ell k} \right) g_{kj} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_k (u^k |_{j} g_{ik} + u^k |_{i} g_{kj}) - h_{ij} u^3 \quad .
\end{aligned}$$

In einer Rechnung im Stil von § 18 zeigt man

$$\sum_k u^k |_{,j} g_{ik} = u_i |_{,j} \quad .$$

Dies ergibt schließlich  $(u^3 = u_3)$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_i |_{,j} + u_j |_{,i}) - h_{ij} u_3 \quad .$$

Im Falle einer ebenen Schale ist  $f'$  konstant, also

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right)$$

wie in § 4 und Übungsaufgabe 13.

Eine ähnliche Rechnung ergibt bis auf  $\mathcal{O}(u^2)$

$$\rho_{ij} = u_3 |_{,ij} + \sum_{\ell} (h_i^{\ell} |_{,j} u_{\ell} + h_j^{\ell} u_{\ell} |_{,i} + h_i^{\ell} u_{\ell} |_{,j}) - k_{ij} u_3 \quad .$$

Dabei ist  $u_3 |_{,ij}$  einfach die kovariante Ableitung von  $\frac{\partial u_3}{\partial \xi_i}$  nach  $\xi_j$ , und

$$h_i^{\ell} = \sum_k g^{\ell k} h_{ki} \quad .$$

Nun kommen wir zur Formulierung des Hooke'schen Gesetzes. Die Schale habe den Elastizitätsmodul  $E$  und die Poisson'sche Querszahl  $\nu$ .

Wir setzen

$$D^{ijkl} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk} + \frac{2\nu}{1-\nu} g^{ij} g^{\ell k} \right) \quad .$$

Dann führen wir die Spannungstensoren

$$\sigma^{ij} = d \sum_{k,\ell=1}^2 D^{ijkl} \varepsilon_{k\ell} \quad , \quad \tau^{ij} = \frac{d^3}{12} \sum_{k,\ell=1}^2 D^{ijkl} \rho_{k\ell}$$

ein. Die der Verzerrung  $u$  entsprechende Deformationsenergie ist dann

$$a(u, u) = \int_S \sum_{i,j=1}^2 (\sigma^{ij} \varepsilon_{ij} + \tau^{ij} \rho_{ij}) ds \quad .$$

Wir berechnen bis auf  $\mathcal{O}(u^3)$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} &= \frac{Ed}{2(1+\nu)} \sum_{i,j,k,\ell=1}^2 (g^{ik} g^{j\ell} + g^{i\ell} g^{jk} + \frac{2\nu}{1-\nu} g^{ij} g^{\ell k}) \varepsilon_{k\ell} \varepsilon_{ij} \\ &= \frac{Ed}{2(1+\nu)} \left( \sum_{i,\ell=1}^2 \varepsilon_{\ell}^i \varepsilon_i^{\ell} + \sum_{i,k=1}^2 \varepsilon_k^i \varepsilon_i^k + \frac{2\nu}{1-\nu} \varepsilon_k^k \varepsilon_i^i \right) \\ &= \frac{Ed}{1-\nu^2} \left( (1-\nu) ((\varepsilon_1^1)^2 + (\varepsilon_2^2)^2 + 2\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^1) + \nu (\varepsilon_1^1 + \varepsilon_2^2)^2 \right) . \end{aligned}$$

Ebenso:

$$\sum_{i,j=1}^2 \tau^{ij} \rho_{ij} = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \left( (1-\nu) ((\rho_1^1)^2 + (\rho_2^2)^2 + 2\rho_1^2 \rho_2^1) + \nu (\rho_1^1 + \rho_2^2)^2 \right) .$$

Hierbei haben wir gesetzt:

$$\varepsilon_k^i = \sum_{\ell=1}^2 g^{i\ell} \varepsilon_{\ell k} \quad , \quad \rho_k^i = \sum_{\ell=1}^2 g^{i\ell} \rho_{\ell k}$$

### BEISPIELE:

1) Ebene Platte, d.h.  $f(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$  ,  $x \in \Omega$

$$g = I, \quad \varepsilon_{ik} = \varepsilon_k^i = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) , \quad \rho_{ik} = \rho_k^i = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i \partial x_k}$$

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \frac{Ed}{1-\nu^2} \int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right\} dx \\ &+ \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \int_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right\} dx \end{aligned}$$

- 2) Der Zylinder aus §18. Hier ist  $\partial f_1 / \partial \xi_1 = -Rn$ , alle anderen  $\partial f_i / \partial \xi_j$  sind 0. Also  $\Gamma_{ij}^k = 0$ . Außerdem  $h_1^1 = \frac{1}{R}$ , alle anderen  $h_i^l$  sind 0. Damit wird

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right) - R \delta_{i1} \delta_{j1} u_3$$

$$\rho_{ij} = \frac{\partial u_3}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{2}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - \delta_{i1} \delta_{j1} u_3 \quad ,$$

$$\varepsilon_i^1 = R^{-2} \varepsilon_{1i} \quad , \quad \varepsilon_i^2 = \varepsilon_{2i}$$

und entsprechend für  $\rho_i^j$ .

Wie in § 4 nimmt man nun an, die Schale sei einer Volumenkraft

$$F = \sum_{i=1}^2 F^i f_i + F^3 n$$

ausgesetzt. Eine Verrückung

$$v = \sum_{i=1}^2 v_i f_i + v_3 n$$

der Schale gegen diese Kraft verlangt die Arbeit

$$(F, v) = d \int_S F^T v \, dS = d \int_S \left( \sum_{i=1}^2 F^i v_i + F^3 v_3 \right) dS \quad .$$

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen führt dann für den wirklich sich einstellenden Zustand  $u$  der Schale zu der Variationsgleichung

$$u \in V \quad , \quad a(u, v) = (F, v) \quad \forall v \in V \quad .$$

Der relevante Hilbertraum  $V$  ist ein abgeschlossener Unterraum von  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$ . Ist die Schale auf  $\partial\Omega$  eingespannt,

so ist etwa

$$V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \quad .$$

Die  $V$ -Elliptizität von  $a$  kann dann ähnlich wie Satz 4.2 bewiesen werden.

BEISPIEL: Ebene Platte.

Es ist  $a = a_1 + a_2$ , wobei  $a_1$  (bis auf den Faktor  $d$ ) mit der Bilinearform  $a$  aus Satz 4.2 identisch ist. Für  $a_2$  erhalten wir durch partielle Integration

$$\frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \int_{\Omega} (\Delta u_3)^2 dx \quad .$$

Aus Satz 4.2 und Übungsaufgabe 8 folgt also für  $u \in V$

$$a(u, u) \geq c(\nu, E, d) \|u\|_V^2 \quad .$$

Die Variationsgleichung zerfällt hier übrigens in eine Variationsgleichung für  $u_1, u_2$  und eine in  $u_3$ . Diese lautet

$$u_3 \in H_0^2(\Omega), \quad a_2(u_3, v_3) = d \int_{\Omega} F_3 v_3 dx, \quad \forall v_3 \in H_0^2(\Omega).$$

Ist  $u_3 \in H^4(\Omega)$ , so erfüllt  $u_3$

$$\frac{Ed^2}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 u_3 = F_3 \quad \text{in } \Omega, \quad u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad .$$

Die Gleichung  $\Delta^2 u = f$  heißt daher auch Plattengleichung.

## § 20 DIE METHODE DER FINITEN ELEMENTE FÜR KOITER'SCHE SCHALEN

Wir wollen nun die Variationsgleichung

$$u \in V, \quad a(u, v) = (F, v), \quad \forall v \in V$$

mit  $V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$  und den Formen  $a, F$  aus § 19 durch die Methode der Finiten Elemente lösen. Wird die Mittel-  
fläche  $x = f(\xi)$  exakt dargestellt, so kommt man mit dem üblichen  
Schema aus: Man wählt Finite-Element-Räume

$$\mathcal{F}_{ih} \subseteq H_0^1(\Omega), \quad i=1,2, \quad \mathcal{F}_{3h} \subseteq H_0^2(\Omega),$$

setzt  $V_h = \mathcal{F}_{1h} \times \mathcal{F}_{2h} \times \mathcal{F}_{3h}$  und definiert  $u_h$  als Lösung von

$$u_h \in V_h, \quad a(u_h, v) = (F, v), \quad \forall v \in V_h.$$

Da die Fläche  $f$  aber ein sehr kompliziertes Gebildes sein kann, möchte man auch  $f$  approximieren. Es liegt nahe, auch  $f$  durch Finite Element-Funktionen zu approximieren. Um die durch diese Approximation entstehenden Fehler zu verstehen, müssen wir untersuchen, wie  $a$  und die Form  $(, )$  von  $f$  abhängen. Dazu führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$U$  bedeutet einen Vektor mit 12 Komponenten, und zwar

$$D^\alpha u_\ell, \quad \ell = 1, 2, \quad |\alpha| \leq 1, \quad D^\alpha u_3, \quad |\alpha| \leq 2.$$

Dann ist

$$a(u, u) = \sum_{I, J} \int_{\Omega} A_{IJ} U_I U_J d\xi, \quad (u, F) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} F^i u_i \sqrt{\det(g)} d\xi$$

SATZ 20.1: Es gibt Polynome  $P_{IJ}$  in  $\mathbb{R}^7$  und eine halbzahlige positive Zahl  $c_{IJ}$ , so daß

$$A_{IJ} = P_{IJ}(\partial f, \partial^2 f, \partial^3 f) / (\det(g))^{c_{IJ}} .$$

BEWEIS: Mit der Schreibweise  $g = g(\partial f, \partial^2 f, \dots)$  meinen wir, daß  $g$  ein Polynom in den ersten, zweiten usw. Ableitungen von  $f$  mit konstanten Koeffizienten ist. Dann gilt

$$g_{ij} = g_{ij}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\right) , \quad h_{ij} = h_{ij}(\partial f, \partial^2 f) , \quad k_{ij} = k_{ij}(\partial f, \partial^2 f)$$

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(\partial f, \partial^2 f) / \det(g) , \quad h_{i|\ell}^j = h_{i|\ell}^j(\partial f, \partial^2 f, \partial^3 f) / (\det(g))^2$$

$$dS(\xi) = \sqrt{\det(g)} d\xi .$$

Aus den Formeln für  $a$  aus § 19 folgt die Behauptung.  $\blacksquare$

Sei nun  $\Omega$  ein Polygon und  $\mathcal{F}_h$  erzeugt von dem Argyris-Dreieck auf einer Triangulierung, welche die Gleichförmigkeitsbedingung erfüllt. Sei  $P_h$  der zugehörige Interpolations-Operator. Dann setzen wir

$$f_h = P_h f , \quad g_h = f_h^T f_h ,$$

$$A_{IJ,h} = P_{IJ}(\partial f_h, \partial^2 f_h, \partial^3 f_h) / (\det(g_h))^{c_{IJ}} ,$$

$$a_h(u, v) = \sum_{I, J} \int_{\Omega} A_{IJ,h} U_I U_J d\xi , \quad (u, F)_h = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} F^i u_i \sqrt{\det(g_h)} d\xi$$

Ähnlich wie Satz 7.1 zeigt man:

$$\|D^\alpha (f - P_h f)\|_{L_\infty(\Omega)} \leq Ch^{6-|\alpha|} \sum_{|\alpha|=6} \|D^\alpha f\|_{L_\infty(\Omega)}$$

Damit und mit Satz 20.1 folgt für  $f \in C^4(\bar{\Omega})$

$$(20.1) \quad |a_h(u, v) - a(u, v)| \leq Ch^3 \|u\|_V \|v\|_V, \quad ,$$

$$(20.2) \quad (u, F)_h - (u, F) \leq Ch^3 \|u\|_V \quad .$$

Die Finite-Element-Näherung  $u_h$  für  $u$  ist nun erklärt durch

$$u_h \in V_h \quad a_h(u_h, v) = (F, v)_h \quad , \quad \forall v \in V_h \quad .$$

SATZ 20.2: Ist  $f \in C^4(\bar{\Omega})$  und  $u \in H^4(\Omega) \times H^4(\Omega) \times H^5(\Omega)$ , so gilt

$$\|u - u_h\|_V \leq Ch^3 \quad , \quad C = C(u, f) \quad .$$

BEWEIS: Der Satz 5.1 läßt sich auf unsere Situation in der Form

$$\|u - u_h\|_V \leq C \left\{ \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V + \sup_{v \in V_h} \frac{a(u, v) - a_h(u, v)}{\|v\|_V} + \sup_{v \in V_h} \frac{(v, F) - (v, F)_h}{\|v\|_V} \right\}$$

übertragen. Die Behauptung folgt nun direkt aus (20.1), (20.2).

■

Übungen zur Vorlesung "FINITE ELEMENTE"

Abgabe: 27.10.87 in den Kästen 7 - 10

Aufgabe 1: Für welche  $k$  sind die folgenden Funktionen aus  $H^k(\Omega)$ ?

a)  $\Omega = (-1, +1)$  ,  $f(x) = \text{sgn}(x)x^2$  .

b)  $\Omega = (-1, +1)$  ,  $f(x) = |x|^{1/2}$  .

c)  $\Omega = (-2, 2)^2$  ,  $f(x) = \text{Max}(0, 1 - |x|^2)$  .

Aufgabe 2: Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  .

a) Seien  $f, g \in H^k(\Omega)$  ,

zeigen Sie:  $D^\alpha(f + g) = D^\alpha f + D^\alpha g$  für  $|\alpha| \leq k$  .

b) Seien  $f \in H^1(\Omega)$  ,  $g \in C^\infty(\Omega)$  ,

zeigen Sie:  $D^\alpha(fg) = (D^\alpha f)g + fD^\alpha g$  für  $|\alpha| \neq 1$  .  $\neq$

c) Seien  $f \in H^1(\Omega)$  ,  $g \in H^1(\Omega)$  ,

zeigen Sie:  $D^\alpha(fg) = (D^\alpha f)g + fD^\alpha g$  für  $|\alpha| \leq 1$  .

Hinweis: Benutzen Sie b) und Satz 2.3.

Aufgabe 3: Sei  $f \in H^m(\Omega)$  und  $D^\alpha f = 0$  für  $|\alpha| \geq m$  .

Zeigen Sie: Dann ist  $f$  ein Polynom vom Grad  $\leq m - 1$  .

Hinweis: Benutzen Sie Satz 2.3.

Aufgabe 4: Sei  $p$  ein Polynom vom Grad  $\leq k$  und sei  $\Omega$  offen und nicht leer, und es gelte  $\int_{\Omega} D^\alpha p \, dx = 0 \quad \forall \alpha$  mit  $|\alpha| \leq k$ .

Zeigen Sie: Dann ist  $p \equiv 0$ .

Übungen zur Vorlesung "FINITE ELEMENTE"

Abgabe: 03.11.87, in den Kästen 7 - 10

Aufgabe 5: Sei  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1/2\}$ . Sei  $f(x) = \log \log \frac{1}{|x|}$ .  
Zeigen Sie:  $f \in H^1(\Omega)$ .

Aufgabe 6: Sei  $\Omega$  die Einheitskugel in  $\mathbb{R}^d$ . Für  $f \in C^\infty(\partial\Omega)$  setzen wir

$$\|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \text{Inf} \{ \|u\|_{H^1(\Omega)} : u \in H^1(\Omega), u = f \text{ auf } \partial\Omega \}$$

Zeigen Sie:  $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$  ist eine Norm auf  $C^\infty(\partial\Omega)$ .

Aufgabe 7: Sei  $V$  ein Hilbertraum,  $f \in V$ , und  $a$  eine stetige und  $V$ -elliptische Bilinearform auf  $V$ . Nach Lax-Milgram gibt es dann genau ein  $u \in V$  mit

$$a(u, v) = (f, v), \quad v \in V.$$

Zeigen Sie: Ist  $a$  symmetrisch, so minimiert  $u$  das Funktional

$$s(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v)$$

in  $V$ .

Aufgabe 8: Sei  $\Omega$  ein Lipschitz - Gebiet. Zeigen Sie:

Für  $u \in H_0^2(\Omega)$  gilt:

$$\|\Delta u\|_{L_2(\Omega)} = \|u\|_{H^2(\Omega)}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Übungen zur Vorlesung "FINITE ELEMENTE"

Abgabe: Di., 10.11.87, in den Kästen 7 - 10

Aufgabe 9: Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet. Sei  $\gamma \in C(\partial\Omega)$ ,  $\gamma(x) > 0$  für  $x \in \partial\Omega$ ,  $g \in L_2(\partial\Omega)$ ,  $f \in L_2(\Omega)$ .

Zeigen Sie:

(a) Es gibt genau ein  $u \in H^1(\Omega)$ , so daß für alle  $v \in H^1(\Omega)$  gilt:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma uv \, d\sigma = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v \, d\sigma .$$

(b) Ist  $u \in H^2(\Omega)$ , so gilt:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega .$$

Aufgabe 10: Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet, und sei  $\Gamma \subseteq \Omega$  eine hinreichend reguläre Fläche (z.B. Rand eines in  $\Omega$  liegenden Lipschitz-Gebietes). Sei  $f \in L_2(\Gamma)$ .

Zeigen Sie:

(a) Es gilt genau ein  $u \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Gamma} f v \, dx , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) .$$

(b) Sei  $\Omega'$  offen und  $\Omega' \subseteq \Omega - \Gamma$ . Ist  $u \in H^2(\Omega')$ , so gilt

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega' .$$

Aufgabe 11: Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet. Sei  $V := \{v \in H^1(\Omega) :$

$\int_{\Omega} v \, dx = 0\}$ . Zeigen Sie:

(a)  $V$  ist unter dem inneren Produkt

$$(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

ein Hilbertraum.

b.w.

Übungen zur Vorlesung "FINITE ELEMENT"

Abgabe: Di., 17.11.87 in den Kästen 7 - 10

Aufgabe 13: Wir betrachten in der Ebene die Verzerrung  $x \rightarrow x + u(x)$ . Die Verzerrung sei klein in dem Sinne, daß  $u \in C^2$  und

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right| \leq \delta \ll 1, \quad i, k = 1, 2$$

ist.

Man zeige: Das Dreieck  $x + h e_1, x, x + h e_2$  geht bei der Verzerrung über in ein Dreieck  $a, b, c$  mit

$$|a-b| = h \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) + o(h\delta^2) \right)$$

$$|c-b| = h \left( 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x) + o(h\delta^2) \right)$$

$$\cos(\sphericalangle(a-b, c-b)) = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)(x) + o(h\delta^2)$$

Aufgabe 14: Sei  $u$  die Lösung der Variationsgleichung aus §4, Aufgabe 6 der Vorlesung. Sei  $u \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ . Zeigen Sie:

(a)  $u$  erfüllt in  $\Omega$

$$-\frac{E}{2(1+\nu)} \Delta u - \frac{E}{2(1-\nu)} \operatorname{grad} \operatorname{div} u = f$$

(b) Mit den zu  $u$  gehörigen Spannungen  $\sigma_{ij}(u)$ , also

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}(u) \\ \sigma_{22}(u) \\ \sigma_{12}(u) \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

gilt auf  $\partial\Omega - \Gamma$  für  $i = 1, 2$ :

$$\sigma_{i1}(u) \nu_1 + \sigma_{i2}(u) \nu_2 = 0$$

b.w.

Übungen zur Vorlesung "FINITE ELEMENTE"

Abgabe: Di., 24.11.87, in den Kästen 7 - 10

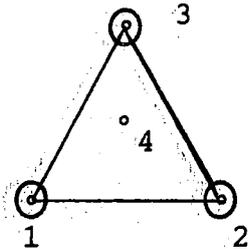
Aufgabe 17: Sei  $E$  das Dreieck  $a_1, a_2, a_3$  und sei  $a_4$  sein Schwerpunkt. Sei

$$\varphi(p) = 6p(a_4) - 2 \sum_{\ell=1}^3 p(a_\ell) + \sum_{\ell=1}^3 \nabla p(a_\ell) \cdot (a_\ell - a_4) .$$

Das Finite Element  $(E, \mathcal{P}, \Phi)$  mit

$$\mathcal{P} = \{p \in \mathcal{P}_3 : \varphi(p) = 0\}$$

$$\Phi = \{D^\alpha p(a_\ell), \quad |\alpha| \leq 1, \quad \ell = 1, 2, 3\}$$

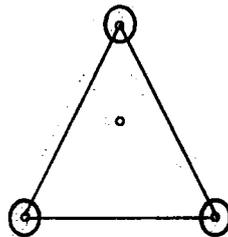


heißt Zienkiewicz-Dreieck. Man zeige:

(a)  $(E, \mathcal{P}, \Phi)$  ist unisolvent,

(b)  $\mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{P}$ .

Aufgabe 18: Berechnen Sie bis auf Symmetrie sämtliche Formfunktionen des dreieckig-hermite'schen-kubischen Elements



für das Einheitsdreieck.

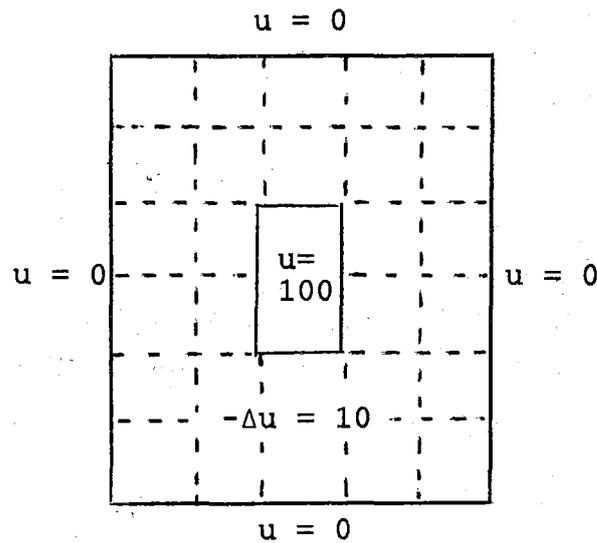
Aufgabe 19: Sei  $(E, \mathcal{P}, \Phi)$  das reduzierte Hsieh-Clough-Tocher-Dreieck, d.h.  $\mathcal{P} = \{p \in \mathcal{P}_{\text{HCT}} : \frac{\partial p}{\partial \nu} \text{ linear auf den Kanten von } E\}$  und  $\Phi = \{D^\alpha p(a_\ell) : \ell = 1, 2, 3, |\alpha| \leq 1\}$ . Zeigen Sie, daß  $(E, \mathcal{P}, \Phi)$  unisolvent ist und  $\dim \mathcal{P} = 9$ .

Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis zu Satz 6.3.

Übungen zur Vorlesung "FINITE ELEMENTE"

Abgabe: Di., 15.12.87, in den Kästen 7 - 10

Aufgabe 29: Lösen Sie das Problem



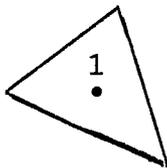
durch das Programm SEG3P1. Verwenden Sie die in der Figur ange-  
deutete Unterteilung.

Aufgabe 30: Bestätigen Sie folgende Tabelle für Quadraturformeln  
in Dreiecken:

Knoten und Gewichte

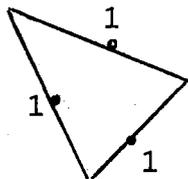
Faktor

Exaktheitsklasse



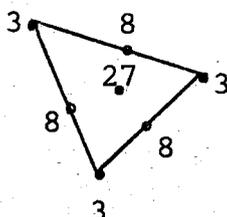
$|E|$

$\mathcal{P}_1$



$\frac{|E|}{3}$

$\mathcal{P}_2$



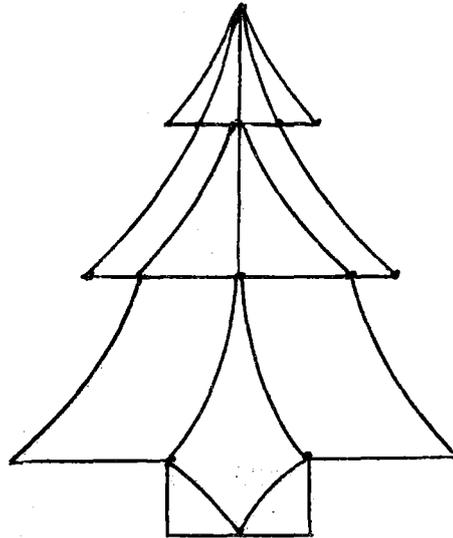
$\frac{|E|}{60}$

$\mathcal{P}_3$

Übungen zur Vorlesung "FINITE ELEMENTE"

Abgabe: Di., 05.01.88, in den Kästen 7 - 10

Aufgabe 33: Sei



der Graph einer symmetrischen Matrix  $G(A)$ . Zeigen Sie, daß man für  $A$  durch Ummuieren von Zeilen und Spalten die Bandbreite 4 erreichen kann.

Aufgabe 34: Sei  $A$  eine symmetrische Matrix und  $G(A)$  ihr Graph.

- (a) Sei  $d$  der maximale Knotengrad in  $G(A)$ . Dann gilt für die Bandbreite  $h$  von  $A$

$$h \geq \left\lfloor \frac{d+1}{2} \right\rfloor$$

- (b) Sei  $N_k$  die Anzahl der Knoten der Stufe  $k$ , welche im Cuthill - McKee Algorithmus für  $G(A)$  auftreten. Dann kann man durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen erreichen, daß  $A$  die Bandbreite

$$h \leq \max_k (N_k + N_{k-1} - 1)$$

hat.

b.w.

Übungen zur Vorlesung "FINITE ELEMENTE"

Abgabe: Di., 12.01.88, in den Kästen 7 - 10

Aufgabe 37: Sei  $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}} \times \tilde{\mathcal{F}}$ , wobei  $\tilde{\mathcal{F}}$  den linearen Raum der Finite-Elemente-Funktionen mit dem Crouzeix-Raviart-Dreieck auf einer Triangulierung mit  $t$  Dreiecken  $(E_\ell, \ell=1, \dots, t)$  und  $v$  Ecken bezeichne.

Man zeige:

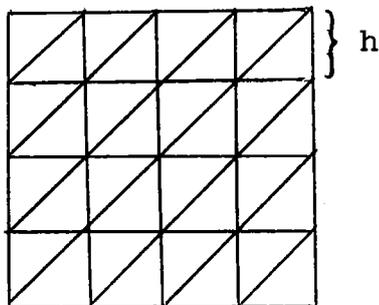
(a)  $\dim \mathcal{F} = 2(v+t-1)$

(b) Sei  $\mathcal{F}_{\text{div}} = \{u \in \mathcal{F} : \text{div } u|_{E_\ell \times E_\ell} = 0, \ell=1, \dots, t\}$ . Dann ist  
 $\dim \mathcal{F}_{\text{div}} = 2v + t - 2$ .

Aufgabe 38: Man löse

$$-\Delta u = 1 \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

für  $\Omega = (0,1) \times (0,1)$  mit Lagrangeschen linearen Dreiecken auf der Triangulierung



$$h = \frac{1}{n}$$

und zeige, daß mit  $u_{ij} = u_h(ih, jh)$  gilt

$$4u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = h^2, \quad i, j=1, \dots, n-1.$$

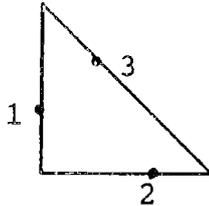
Aufgabe 39: Man löse das Problem von Aufgabe 38 mit dem Crouzeix - Raviart-Dreieck.

Übungen zur Vorlesung "FINITE ELEMENTE"

Abgabe: Di., 19.01.88, in den Kästen 7 - 10

Aufgabe 41: Zeigen Sie, daß das Crouzeix - Raviart - Element den Patch-Test (für Probleme 2. Ordnung) besteht.

Aufgabe 42: Sei  $(E, \mathcal{P}, \phi)$  das Lagrangesche Finite Element mit  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$  im Einheitsdreieck, wobei die Knoten die Katheten bzw. die Hypothenuse dreiteilen:



Zeigen Sie: Dieses Element besteht den Patch-Test (für Probleme 2. Ordnung) nicht.

Aufgabe 43: Sei  $u \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$  die Lösung des Stokesschen Problems:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u + p &= f \\ \operatorname{div} u &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{in } \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei  $p \in H^1(\Omega)$ ,  $f \in L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ .

Zeigen Sie:  $u$  löst die Variationsgleichung:

$$u \in H_{0,\operatorname{div}}(\Omega) \quad a(u,v) = (f,v) \quad , \quad \forall v \in H_{0,\operatorname{div}}(\Omega),$$

wobei

$$a(u,v) = \int_{\Omega} (\nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2) dx$$

$$(f,v) = \int_{\Omega} f_1 v_1 + f_2 v_2 \quad dx$$

$$H_{0,\operatorname{div}} = \{v \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) : \operatorname{div} v = 0\} \quad .$$

b.w.

Übungen zur Vorlesung "FINITE ELEMENTE"

Abgabe: Di., 26.01.88, in den Kästen 7 - 10

Aufgabe 45: Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet,  $\psi \in H^2(\Omega)$  mit  $\psi < 0$  auf  $\partial\Omega$ . Sei  $U = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \psi\}$ , und sei  $f \in L_2(\Omega)$ . Sei  $u$  die Lösung der Variationsungleichung

$$u \in U \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v-u) dx \geq \int_{\Omega} f(v-u) dx, \quad \forall v \in U.$$

Man zeige: Ist  $u \in C^2(\Omega)$ ,  $f \in C(\Omega)$ , so gilt in

$$-\Delta u \geq f, \quad u \geq \psi, \quad (-\Delta u - f)(u - \psi) = 0.$$

Aufgabe 46: Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet und  $f \in L_2(\Omega)$ . Sei  $U = \{v \in H_0^1(\Omega) : |\nabla v| \leq 1\}$ .

Zeigen Sie: Die Variationsungleichung

$$u \in U \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v-u) dx \geq \int_{\Omega} f(v-u) dx \quad \forall v \in U$$

ist eindeutig lösbar.

Aufgabe 47: Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet,  $\psi \in H^2(\Omega)$  und  $f \in L_2(\Omega)$ . Sei  $U = \{v \in H^1(\Omega) : v \geq \psi \text{ auf } \partial\Omega\}$ .

Zeigen Sie:

(a) Die Variationsungleichung

$$u \in U \quad \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla (v-u) + u(v-u)) dx \geq \int_{\Omega} f(v-u) dx \quad \forall v \in U$$

ist eindeutig lösbar.

(b) Sei  $\Omega$  ein Polygon, sei  $\mathcal{F}_h$  der Raum der Finiten-Elemente-Funktionen, welche von linearen Lagrange'schen Elementen auf einer Triangulierung von  $\Omega$  erzeugt werden, und es gebe Konstanten  $C_1, C_2$ , so daß jedes Dreieck eine Kugel vom Radius  $C_1 h$  enthält und in einer Kugel vom Radius  $C_2 h$  enthalten ist. Sei  $U_h = \{v \in \mathcal{F}_h : v \geq \psi \text{ in Randknoten}\}$ ,